



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

LETECKÝ ÚSTAV

INSTITUTE OF AEROSPACE ENGINEERING

**ANALÝZA STABILITY KOVOVÝCH VÝZTUŽNÝCH
PROFILŮ PŘI TLAKOVÉM ZATÍŽENÍ POMOCÍ METODY
KONEČNÝCH PRVKŮ**

STABILITY ANALYSIS OF METAL STIFFENERS UNDER COMPRESSIVE LOAD USING FINITE ELEMENTS
METHODS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Aleš Hála

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Tomáš Katrňák

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Letecký ústav
Student: **Aleš Hála**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Tomáš Katrňák**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza stability kovových výztužných profilů při tlakovém zatížení pomocí metody konečných prvků

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Proveďte rešerši používaných analytických metod pro výpočet stability profilů v tlaku. Vytvořte plošné i objemové modely L profilu dle doporučení vedoucího práce a proveďte nelineární výpočty pomocí řešičů v programovém balíku MSC. Patran/Nastran. Porovnejte vhodnosti modelů a řešičů. Výsledky srovnajte s výsledky experimentálního měření.

Cíle bakalářské práce:

1. Srovnání analytických metod pro výpočet stability profilů v tlaku
2. Tvorby modelů a porovnání vhodnosti modelů
3. Srovnání teoretických hodnot s výsledky experimentálního měření

Seznam doporučené literatury:

NIU M. C. Y. Airframe structural design – second edition, Hong Kong Conmilit press ltd., 2002.

PÍŠTĚK A., GRÉGR O., KULHÁNEK V., BÖHM R. Pevnost a životnost letadel 1, VUT v Brně, 1988.

TIMOSHENKO S. Theory of elastic stability, McGrawHill Book company, New York, 1936.

ČTVERÁK J., MERTL V., PÍŠTĚK A. Soubor podkladů pro pevnostní výpočty leteckých konstrukcí, Brno, 1997.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jaroslav Juračka, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá ztrátou stability kovového výztužného profilu. První část zahrnuje rešerši vybraných analytických metod. Další část se zabývá numerickým řešením, včetně tvorby vhodného výpočtového modelu a nelineárních výpočtů v programu MSC Patran/Nastran. Závěrečná část srovnává teoretické hodnoty analytického a numerického řešení s výsledky experimentálního měření.

ABSTRACT

This bachelor's thesis deals with an analysis of metal stiffener under compressive load. The first part of the thesis includes a research of analytic methods. The other part of the thesis deals with a numerical solution including creating of suitable model and using nonlinear finite elements methods solutions of MSC Patran/Nastran software package. In the conclusion of the thesis, all theoretical data and numerical results were compared with experimental test.

KLÍČOVÁ SLOVA

Stabilita, analýza, profil, MKP, metoda konečný prvků.

KEYWORDS

Stability, analysis, profile, FEM, finite element method

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

HÁLA, A. *Analýza stability kovových výztužných profilů při tlakovém zatížení pomocí metody konečných prvků*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 85 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Katrňák.

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji svému vedoucímu práce, Ing. Tomáši Katrňákovi za jeho čas, který se mnou strávil při konzultacích i za veškeré věnované podklady a cenné rady potřebné k napsání této bakalářské práce.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením Ing. Tomáše Katrňáka a s použitím literatury uvedené v seznamu.

V Brně dne 26. května 2017

.....

Hála Aleš

OBSAH

1	ÚVOD	15
2	VÝZNAM A APLIKACE VÝZTUŽNÝCH PROFILŮ.....	17
2.1	Poloskořepinové křídlo	17
2.2	Silové zatížení stringerů.....	18
2.2.1	Namáhání křídla za letu	18
2.2.2	Zatížení nosného potahu	19
3	STABILITA TENKOSTĚNNÝCH PROFILŮ	21
3.1	Mezní stav vzpěrné stability	21
3.2	Typy poruch v tlaku	22
3.2.1	Celková (globální) ztráta stability	23
3.2.2	Přechodová oblast.....	23
3.2.3	Místní (lokální) ztráta stability	23
4	ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ ZTRÁTY STABILITY	25
4.1	Vstupní hodnoty výpočtu.....	25
4.2	Řešení celkové ztráty stability v pružné oblasti.....	27
4.2.1	Eulerova metoda	27
4.3	Řešení celkové ztráty stability v nepružné oblasti.....	29
4.3.1	Tetmajerova přímka.....	29
4.4	Řešení ztráty stability v přechodové oblasti	30
4.4.1	Johnsonova parabola.....	30
4.5	Zhodnocení metod a výsledků celkové ztráty stability	31
4.6	Řešení místní ztráty stability.....	33
4.6.1	Diagram podle Timoshenka.....	33
4.6.2	Metoda podle Niu	35
4.6.3	Bruhn	37
4.7	Zhodnocení metod a výsledků místní ztráty stability	39
4.8	Závěrečné porovnání výsledků analytických řešení	40
5	SIMULACE METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ.....	41
5.1	Stručný popis principu MKP	41
5.2	Výpočetní software	41
5.3	Příprava výpočtového modelu	42
5.3.1	Vstupní geometrie.....	42
5.3.2	Volba typu prvku	42
5.3.3	Vytvoření sítě	44
5.3.4	Okrajové podmínky	45
5.3.5	Volba materiálu	45
5.3.6	Typ analýzy	45
5.3.7	Výpočtový model	46
5.4	Numerický výpočet.....	46
5.4.1	Postprocesing	46
5.5	Porovnání vlivu imperfekcí na stabilitu výztužného profilu	47
5.5.1	Posun prostředního uzlu na hraně profilu (A)	48
5.5.2	Střídavý posun všech uzlových bodů na jedné hraně profilu (B).....	53
5.5.3	Střídavý posun všech uzlových bodů na obou hranách profilu (C).....	56
5.5.4	Střídavý posun všech uzlových bodů na jedné stěně profilu (D)	59
5.5.5	Střídavý posun všech uzlových bodů na obou stěnách profilu (E).....	62

5.6	Vyhodnocení numerického řešení	64
6	SROVNÁNÍ TEORETICKÝCH HODNOT S EXPERIMENTEM.....	65
6.1	Porovnání analytických výpočtů s hodnotami experimentu.....	65
6.3	Celkové porovnání modelů s imperfekcemi.....	67
6.4	Volba vhodného model.....	68
6.5	Závěrečné shrnutí	69
7	ZÁVĚR.....	70
8	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	71
9	SEZNAM ZKRATEK, SYMBOLŮ, OBRÁZKŮ A TABULEK.....	73
9.1	Seznam použitých zkratk a symbolů	73
9.2	Seznam obrázků.....	74
9.3	Seznam tabulek.....	76
9.4	Seznam grafů	76
10	SEZNAM PŘÍLOH.....	77

1 ÚVOD

Tato bakalářská práce se zabývá analýzou výztužného duralového profilu, tzv. stringeru, z hlediska jeho stability při tlakovém namáhání. Daný profil se používá jako vyztužující prvek leteckých konstrukcí. Je tak obvykle součástí křídel, trupu nebo ocasních ploch. Jeho primárním účelem je přenášet tahová a tlaková napětí, která mohou být v případě tenkostěnných konstrukcí zvláště nebezpečná. Při překročení tzv. kritické hodnoty tlakového napětí nastává mezní stav vzpěrné stability, který se projeví jednorázovým vybočením celého profilu nebo části jeho průřezu ze své původní polohy. Takto deformovaný profil pak ztratí svou tuhost a schopnost přenášet další zátěž. Proto je důležité vědět, kdy a při jaké velikosti zatížení k tomuto meznímu stavu může dojít a díky tomu mu předejít.

K řešení úloh týkajících se stability profilů lze využít analytického i numerického výpočtu metodou konečných prvků. V případě analytického řešení existuje několik metod, které budou v práci uvedeny a použity přímo ke konkrétním výpočtům.

Hlavní část mé bakalářské práce se bude týkat řešení stability daného profilu metodou konečných prvků. Aby mohly být výsledky získané numerickým výpočtem validní, je nezbytné provést řadu operací, které předchází samotnému řešení. Mezi ně patří především tvorba výpočtového modelu, která zahrnuje mj. vytvoření sítě konečných prvků, nadefinování okrajových podmínek, nebo stanovení optimální velikosti tzv. imperfekcí¹ právě v úlohách zabývajících se stabilitou.

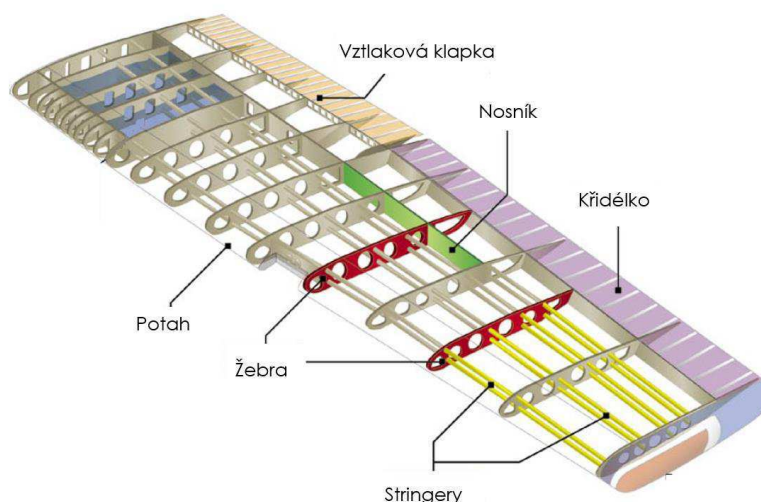
Verifikaci výsledků je poté nutné provádět kriticky a správnost řešení si ověřit i jiným způsobem. V mém případě budou porovnány výsledky numerického řešení na základě analytických výpočtů a provedeného experimentálního měření.

¹ Imperfekce neboli odchylky od ideálního případu (geometrie, zatížení, materiál).

2 VÝZNAM A APLIKACE VÝZTUŽNÝCH PROFILŮ

Na letadlo během letu působí síly a momenty, které namáhají jednotlivé části konstrukce. Tato vnější zatížení jsou ve většině případů časově proměnná, a to ve své velikosti i působení. Vyvolávají tak v materiálu stavy napjatosti, které musí být po celou dobu provozu letadla v bezpečném rozsahu. Z toho důvodu je důležité, aby měl letoun dostatečnou pevnost, tuhost a nedošlo tak k žádnému meznímu stavu.

S ohledem na tyto parametry a zároveň co nejnižší hmotnost je v letectví využíváno tenkostěnných kovových konstrukcí, které jsou tvořeny výztužnými profily a plechy. Tyto prvky nemají samy o sobě dostatečnou tuhost, avšak ve vzájemném spojení vytváří pevnou strukturu. Příkladem této interakce je tzv. poloskořepinová konstrukce křídla viz obr. 2-1.

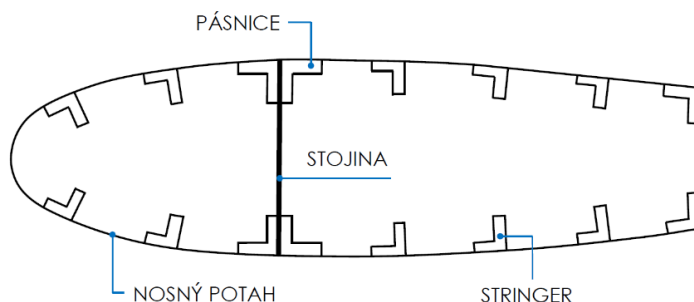


obr. 2-1 Konstruktivní prvky poloskořepinového křídla [12]

2.1 Poloskořepinové křídlo

Daná koncepce křídla je charakteristická podélně vyztuženým nosným potahem pomocí stringerů, které k němu bývají nýtovány nebo lepeny. Tímto vyztužením získá potah větší tuhost a schopnost přenášet kromě smykového toku i normálová napětí od ohybového momentu, které by jinak přenášela pouze pásnice nosníku. Mimo to stringery potah stabilizují a díky tomu nedochází při zatížení k jeho výraznému zvlnění. [1]

Na obr. 2-2 jsou v řezu znázorněny jednotlivé prvky poloskořepinového křídla včetně stringerů.



obr. 2-2 Řez křídlem poloskořepinové konstrukce [1]

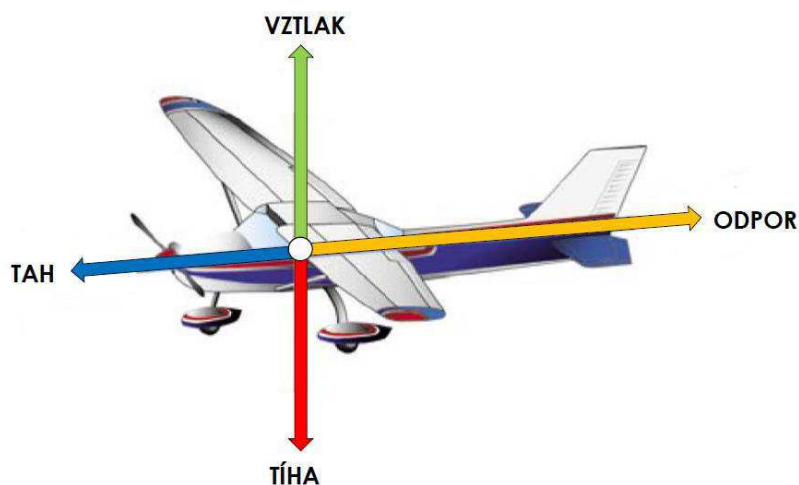
2.2 Silové zatížení stringerů

Stringery obecně přenáší tahová a tlaková zatížení vznikající při samotném provozu letadla. Vznik těchto zatížení lze vysvětlit na příkladu namáhání křídla.

2.2.1 Namáhání křídla za letu

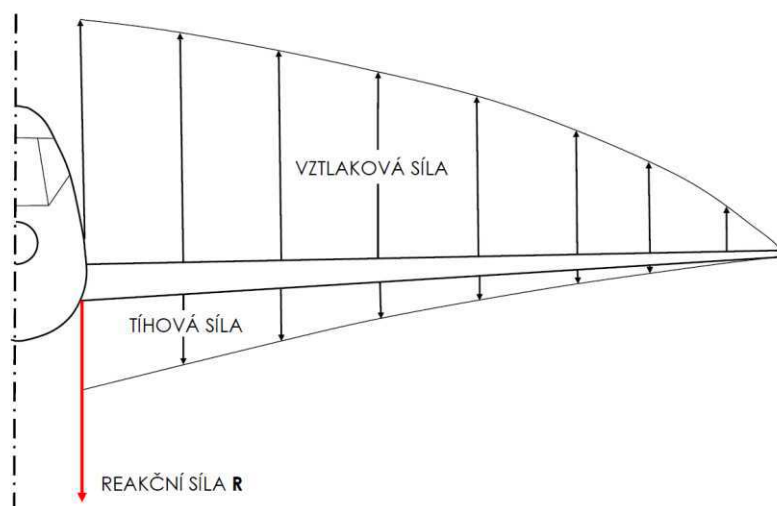
Křídlo je během letu namáháno kombinací sil a momentů. Všechna tato vnější zatížení musí být stále ve statické rovnováze s vnitřními silami, které vyvozují v konstrukci normálová a smyková napětí. Důležité je, aby po celou dobu provozu letadla zůstala tato napětí v bezpečném rozsahu a nedošlo k překročení jejich mezních hodnot.

V případě křídla je hlavním zátěžným účinkem vztlaková síla, která je spojitě rozložena podél rozpětí a hloubce profilu křídla a působí směrem nahoru. Tato síla musí překonávat tíhovou sílu působící na jednotlivé části konstrukce viz obr. 2-3.



obr. 2-3 Síly působící na letoun [12]

Převaha vztlakové síly nad tíhovou způsobí v místě uchycení křídla u trupu vznik reakce R viz obr. 2-4. Reakční síla následně uvede křídlo do statické rovnováhy. [8]



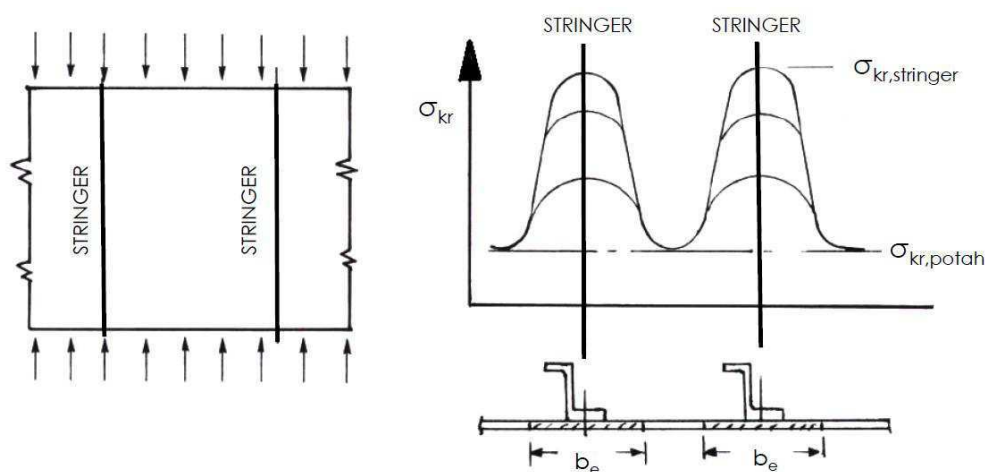
obr. 2-4 Silové působení na křídle [8]

Při stanovení výsledných vnitřních účinků (VVÚ) lze určit, že v konstrukci křídla bude působit posouvající síla, kroutící moment a ohybový moment. Posouvající síla je přenášena stojinou nosníku, kroutící moment nosným potahem a stojinou nosníku a ohybový moment pásnicemi společně s přispěním stringerů.

V případě analýzy stability je dominantním zatížením ohybový moment, díky kterému se křídlo ohýbá. Pokud je násobek zatížení kladný, nastává průhyb nahoru. Spodní část křídla se tak natahuje a horní stlačuje. Stlačení horní části má pak za následek vznik tlakového napětí, které může být příčinou zvlnění potahového plechu vlivem jeho malé tuhosti. Je tak nutné potah vyztužit pomocí stringerů.

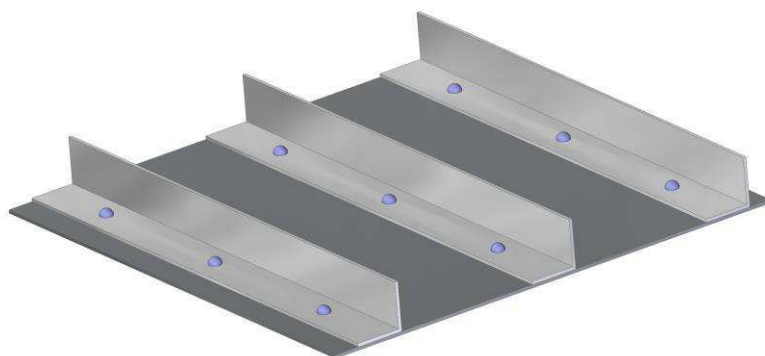
2.2.2 Zatížení nosného potahu

Následující obr. 2-5 znázorňuje průběh napětí v potahu zatíženého rovnoměrně membránovým tlakem. Rozložení napjatosti však rovnoměrné není. Místa potahu vyztužená stringery, tvořící tzv. účinnou šířku b_e , přenáší větší tlaková zatížení než oblasti mezi nimi. [2]



obr. 2-5 Průběh napětí ve vyztuženém potahu při tlakovém zatížení [2]

V praxi se to projeví tak, že při překročení kritického napětí potahu $\sigma_{kr,potah}$ nevyztužená pole potahu mezi stringery ztratí stabilitu dříve a zvlní se. V oblastech vyztužení stringery však kritického napětí dosaženo není a potah tak může dále omezeně plnit svou funkci. Mezní stav nastane až po překročení kritického napětí ve stringeru $\sigma_{kr,stringer}$.



obr. 2-6 Vyztužený nosný potah

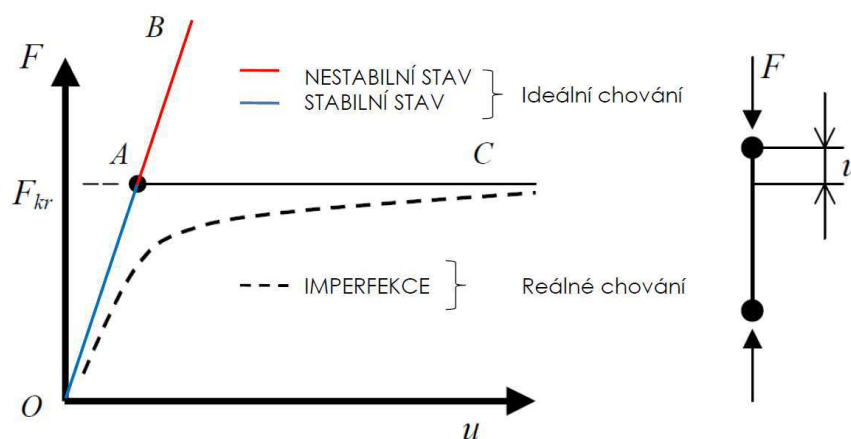
3 STABILITA TENKOSTĚNNÝCH PROFILŮ

Pokud je tenkostěnná konstrukce namáhána tlakovými silami, je nutné kromě klasické deformačně-napjatostní analýzy provést i analýzu stabilitní. Ta je v mnoha případech důležitější, jelikož poruchy způsobené ztrátou stability nevykazují předem v podstatě žádné náznaky porušení.

3.1 Mezní stav vzpěrné stability

Mezní stav vzpěrné stability je v případě tenkostěnných konstrukcí častým typem porušení. Nastává při dosažení tzv. kritického tlakového napětí, které konstrukce nedokáže přenést. Původní deformace způsobená tlakem se jednorázově změní na deformaci vlivem ohybu, popřípadě kombinaci ohybu a krutu. Díky tomu, že ohybová tuhost profilu je v porovnání s osovou tuhostí nižší, nastane velké vybočení prutu v příčném směru.

Pokud není kritického napětí dosaženo, vnitřní síly jsou ve statické rovnováze s vnějším zatížením a namáhaný prvek je ve stabilním stavu (0-A) viz obr. 3-1. Jestliže však napětí dosáhne kritické hodnoty, prvek se může teoreticky chovat dvěma způsoby. Buď okamžitě vybočí (A-C), nebo setrvá ve stavu nestabilní rovnováhy (A-B). Tento stav se nazývá bifurkace neboli rozdvojení rovnováhy. Následně pak jakýkoliv nepatrný impuls síly v příčném směru způsobí vybočení prutu. [9]



obr. 3-1 Závislost kritické síly na stlačení [9]

To, co bylo popsáno v předchozím odstavci je však pouze teoretický případ stlačování ideálně přímého prutu, který se do okamžiku dosažení kritické síly chová lineárně a je pouze osově stlačován. Ve skutečnosti však bifurkace nikdy nenastane. To, čím se ideální a reálné konstrukce liší, jsou tzv. imperfekce neboli odchylky od ideálního případu týkající se např. tvaru profilu, materiálu, vazeb nebo zatížení. [9]

Reálný profil není nikdy vlivem technologie výroby dokonale přímý, zatížení nepůsobí přímo v těžišti průřezu a uchycení nemusí přesně odpovídat teoretické vazbě. Tyto aspekty způsobí, že se prut po zatížení bude od začátku ohýbat a kroutit se vzrůstající silou čím dále více. Chování dané konstrukce je tak nelineární viz obr. 3-1.

3.2 Typy poruch v tlaku

U profilů namáhaných tlakem může nastat několik typů poruch. Obecně předem není úplně jasné, jakým způsobem se prvek poruší a typ poruchy se pouze předpokládá. Proto je důležité provést nejprve analýzu úlohy z které se určí, jaká metoda řešení bude nejvhodnější.

Zásadním parametrem, který ovlivňuje způsob ztráty stability je štíhlost prutu λ . Je definována vztahem (3.1), kde l je délka prutu a i_{min} minimální poloměr setrvačnosti průřezu (3.2).

$$\lambda = \frac{l}{i_{min}} \quad (3.1)$$

Pro výpočet minimálního poloměru setrvačnosti je potřeba znát plochu příčného průřezu profilu S a minimální osový kvadratický moment průřezu J_{min} , protože:

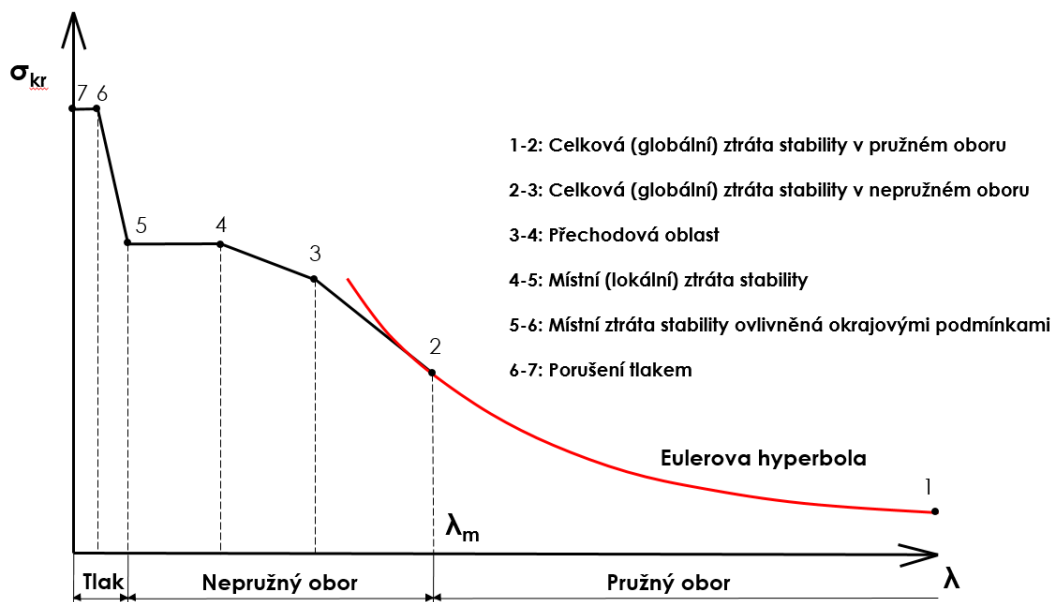
„Vybočení nastane kolem osy, která je minimální hlavní centrální osou kvadratického momentu průřezu“. [11]

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}} \quad (3.2)$$

Důležité je stanovit i tzv. mezní štíhlost (3.3), která odpovídá napětí na mezi kluzu $R_{p0,2}$. Tato mezní štíhlost rozděluje oblast ztráty stability na pružnou a nepružnou.

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{R_{p0,2}}} \quad (3.3)$$

Konkrétní profil s danými rozměry a příčným průřezem je poté možné popsat tzv. diagramem stability obr. 3-2. Diagram je rozdělen na oblasti charakteristické jiným typem ztráty stability, a to vždy pro určitý rozsah délek, resp. štíhlostí profilu λ .



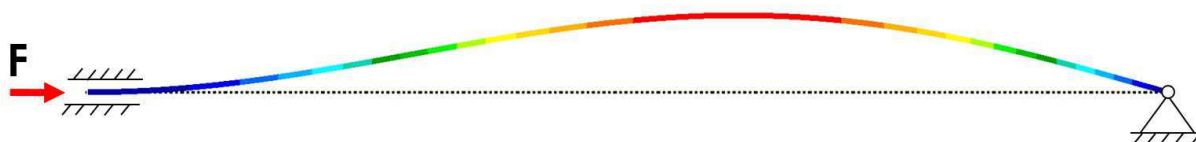
obr. 3-2 Diagram stability prutu [1]

V případě tenkostěnných leteckých konstrukcí připadá v úvahu celková a místní ztráta stability včetně přechodové části mezi nimi.

3.2.1 Celková (globální) ztráta stability

Celková ztráta stability, z angl. global buckling, je způsob porušení tlakem namáhaných dlouhých štíhlých profilů. Projeví se vybočením střednice prutu v celé jeho délce mezi vazbami, a to při napětí buď pod, nebo nad mezí kluzu. Proto se obecně rozlišuje mezi celkovou ztrátou stability v pružné a nepružné oblasti, kde rozhraním je mezní štíhlost profilu λ_m (3.3). [2]

U stringerů se celková ztráta spíše neočekává. Je to dáno přinýtováním stringeru k potahu s poměrně malou roztečí, čímž je omezena jeho délka i celková deformace. Další vliv na stabilitu může mít uložení stringeru na žebrech nebo tvar příčného průřezu.



obr. 3-3 Charakteristické vybočení prutu při celkové ztrátě stability

Nejčastějším způsobem řešení celkové ztráty stability je tzv. Eulerova rovnice odvozená z diferenciální rovnice průhybové čáry. Řadou experimentů však byly zjištěny nevyhovující hodnoty kritické síly na rozhraní elastické a plastické oblasti. Z toho důvodu je možné použít Eulerovu rovnici pouze v pružném oboru. Pro případ nepružného vzpěru bylo navrženo několik empirických vztahů. [1]

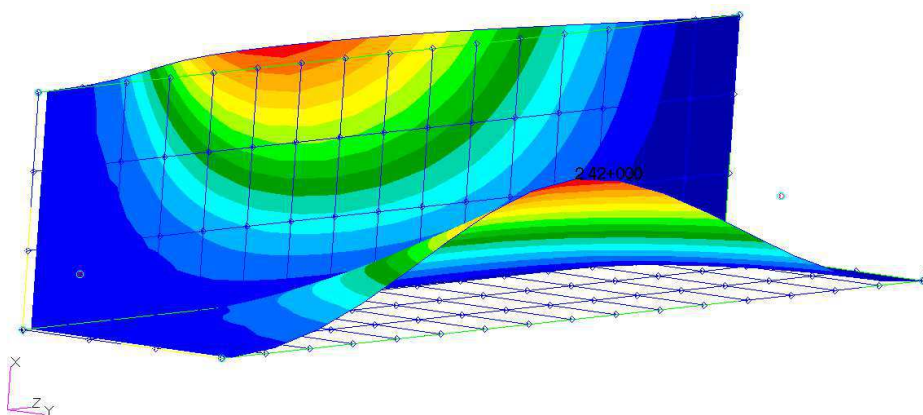
Ve své práci uvádím lineární Tetmajerův vztah, který přesněji popisuje velikost kritického napětí v plastické oblasti materiálu. Podrobněji bude probrán v kapitole 4.3.1.

3.2.2 Přechodová oblast

Vyjadřuje přechod mezi lokální a celkovou ztrátou stability. Chování prutu zde nelze přesně popsat a není tak jasné, jakým způsobem se prut poruší. Je proto nutné využít některých empirických vztahů. V mém případě jsem vybral Johnsonův parabolický vztah viz kapitola 4.4.1.

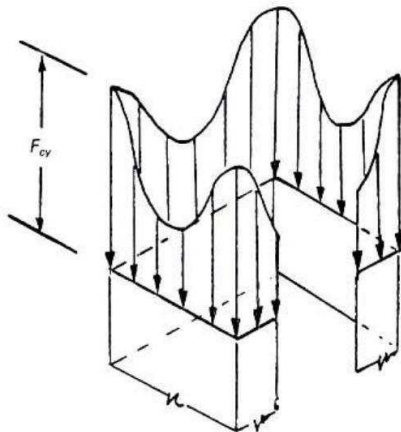
3.2.3 Místní (lokální) ztráta stability

Místní ztráta stability, z angl. crippling, je typická pro krátké tenkostěnné pruty s otevřeným průřezem, jakým jsou právě výztužné profily v leteckých konstrukcích. Při této poruše nedojde k celkovému vybočení střednice, ale pouze části jeho průřezu, kdy se lokálně zdeformuje některá stěna profilu, což je patrné z obr. 3-4.



obr. 3-4 Místní ztráta stability profilu

Vybočení jen určité části průřezu je způsobeno tím, že napětí není po průřezu rozloženo rovnoměrně viz obr. 3-5. Více stabilní části průřezu (rohy, zesílení) dokáží přenést vyšší zatížení než jednotlivé stěny průřezu, které se tím pádem poruší dříve. Místní ztráta stability tedy více závisí na tvaru příčného průřezu, než na délce profilu a jeho uložení, jak tomu je u celkové ztráty stability. [2]



obr. 3-5 Rozložení napětí po průřezu [2]

Při řešení místní ztráty stability se vychází z empirických vztahů nebo grafů vzniklých na základě mnoha měření a experimentů. Podrobným vysvětlením těchto metod a výpočty se budu zabývat v kapitole 4.6.

Dané metody jsou vždy pojmenovány podle svého autora, nebo publikace v které jsou uvedeny:

- Diagram podle Timoshenka
- Metoda podle Niu
- Bruhn

4 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ ZTRÁTY STABILITY

Mým cílem je zjistit velikost kritické síly, resp. napětí, při které nastane mezní stav vzpěrné stability zadaného výztužného profilu. K tomu lze využít několika analytických metod. Jednotlivé způsoby výpočtu jsou vždy vhodné jen pro určitý typ ztráty stability, a proto není možné jejich univerzální použití pro všechny případy. Je tak potřeba provést řešení více způsoby a výsledky vzájemně porovnat.

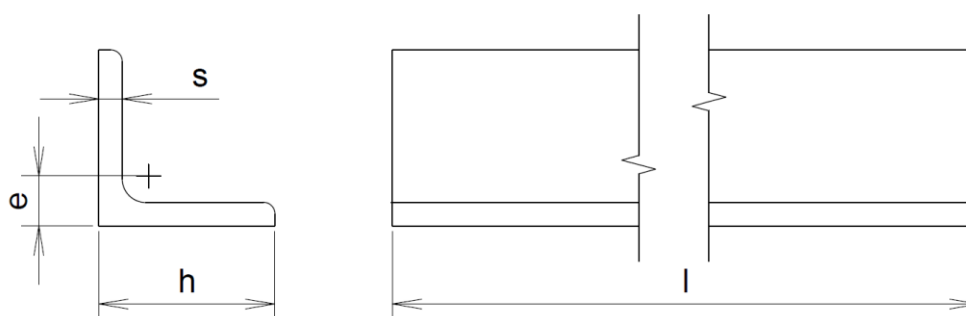
4.1 Vstupní hodnoty výpočtu

- Rozměry a geometrie

Analýza bude prováděna na duralovém profilu s označením L 15x15x1-80. K danému profilu znám naměřená data, které mi poskytl vedoucí práce. Výsledky pak budu moci porovnat přímo s těmito údaji a ověřit si tak správnost svého řešení. Rozměry profilu jsou uvedeny v tab. 4-1. Geometrii profilu znázorňuje obr. 4-1.

tab. 4-1 Rozměry výztužného profilu

Rovnoramenný L profil		
h	15	[mm]
s	1	[mm]
e	4,06	[mm]
l	80	[mm]



obr. 4-1 Geometrie výztužného profilu

- Materiálové charakteristiky

Profil je vyroben z materiálu 2024 T3, což je označení slitiny hliníku, tzv. dural. Materiál je legován 4 % mědi a 1 % hořčíku, dále tepelně zpracován rozpouštěcím žiháním, tvářen za studena a přirozeně stárnutý. [7]

Materiálové charakteristiky jsou uvedeny v tab. 4-2. Pro své výpočty jsem volil minimální hodnoty těchto veličin. Výsledky tak nebudou nadhodnoceny, což je výhodné z hlediska bezpečnosti. Pokud by bylo potřeba provést přesnější výpočty, musely by být tyto parametry ověřeny např. konkrétním měřením.

tab. 4-2 Materiálové charakteristiky [7]

2024 T3			
Mez pevnosti	R_m	440	[MPa]
Smluvní mez kluzu	$R_{p0,2}$	290	[MPa]
Modul pružnosti	E	72400	[MPa]
Poissonovo číslo	μ	0,33	[-]

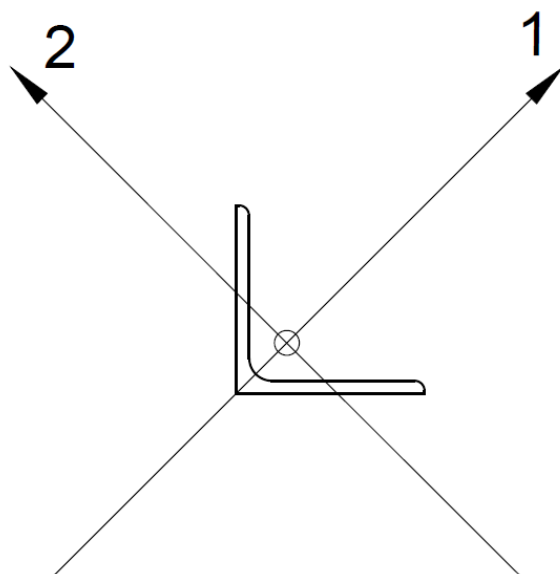
- Průřezové charakteristiky

Pro výpočet štíhlosti prutu je nutné určit obsah plochy průřezu S a minimální osový kvadratický moment průřezu J_2 , což vychází z definice uvedené v kapitole 3.2. Vybočení profilu tak lze očekávat kolem osy 2 viz obr. 4-2.

Hodnotu J_2 jsem vypočítal pomocí softwaru AutoCad Mechanical, která je uvedena s dalšími parametry v tabulce tab. 4-3.

tab. 4-3 Průřezové charakteristiky

Průřezové charakteristiky		
S	29,4	[mm ²]
J_1	990,6	[mm ⁴]
J_2	259,3	[mm ⁴]



obr. 4-2 Hlavní centrální osy průřezu

Tímto mám definované všechny potřebné vstupní parametry a mohu přikročit k volbě metody řešení a samotným výpočtům.

4.2 Řešení celkové ztráty stability v pružné oblasti

4.2.1 Eulerova metoda

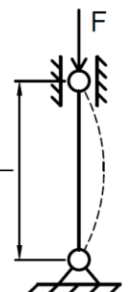
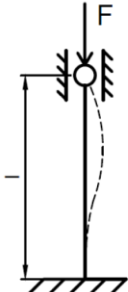
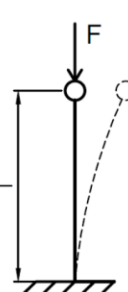
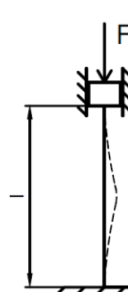
Eulerova metoda je nejčastější způsob řešení úloh vzpěrné stability. Lze ji však použít pouze v případě, kdy je velikost napětí v prutu menší než mez kluzu daného materiálu. Z toho plyne použitelnost Eulerovy metody pouze v elastické oblasti materiálu, což je potřeba ověřit. [2]

Ověření se provede vypočítáním mezní redukované štíhlosti $\lambda_{m,red}$ a následném porovnání s redukovanou štíhlostí daného profilu λ_{red} (4.1). Aby mohla být Eulerova metoda použita, musí být redukovaná štíhlost prutu větší než redukovaná mezní štíhlost dle podmínky (4.2).

$$\lambda_{red} = \frac{\lambda}{\sqrt{c}} \quad (4.1)$$

$$\lambda_{red} > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{R_{P0,2}}} \quad (4.2)$$

Konstanta c ve vztahu (4.1) vyjadřuje vliv okrajových podmínek, tedy způsob uložení prutu v konstrukci. Základní případy uložení včetně hodnot c jsou uvedeny na obr. 4-3.

kloub - kloub		kloub - vetknutí		volně - vetknutí		vetknutí - vetknutí	
$c = 1$	$\frac{1}{\sqrt{c}} = 1$	$c = 2,05$	$\frac{1}{\sqrt{c}} = 0,7$	$c = 0,25$	$\frac{1}{\sqrt{c}} = 2$	$c = 4$	$\frac{1}{\sqrt{c}} = 0,5$
							

obr. 4-3 Vliv okrajových podmínek [2]

Velikost kritické síly se pro různé okrajové podmínky vypočítá pomocí Eulerovy rovnice (4.3), kde l je počáteční délka prutu, E modul pružnosti a J_{min} minimální kvadratický moment. Dalším odvozením lze ze vztahu pro kritickou sílu vyjádřit kritické napětí (4.4).

$$F_{kr} = c \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2} \quad (4.3)$$

$$\sigma_{kr} = c \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{red}^2} \quad (4.4)$$

- Řešení pomocí Eulerovy metody

Za koeficient okrajových podmínek volím hodnotu $c = 1$, která odpovídá kloubovému uložení obou konců prutu. Nejlépe totiž popisuje uložení stringeru na nýtu, kolem kterého se může volně otáčet. Přiblížím se tím i k podmínkám testování, kdy byl profil osově stlačován přes dvě desky a mohl se tak libovolně vychýlit.

Postup řešení je následující:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}} = \sqrt{\frac{259,3}{29,4}} = 2,97 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{l}{i_{min}} = \frac{80}{2,97} = 26,94$$

$$\lambda_{red} = \frac{\lambda}{\sqrt{c}} = \frac{26,94}{\sqrt{1}} = 26,94$$

$$\lambda_{m,red} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{R_{p0,2}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 72400}{290}} = 49,64$$

$$26,94 < 49,64$$

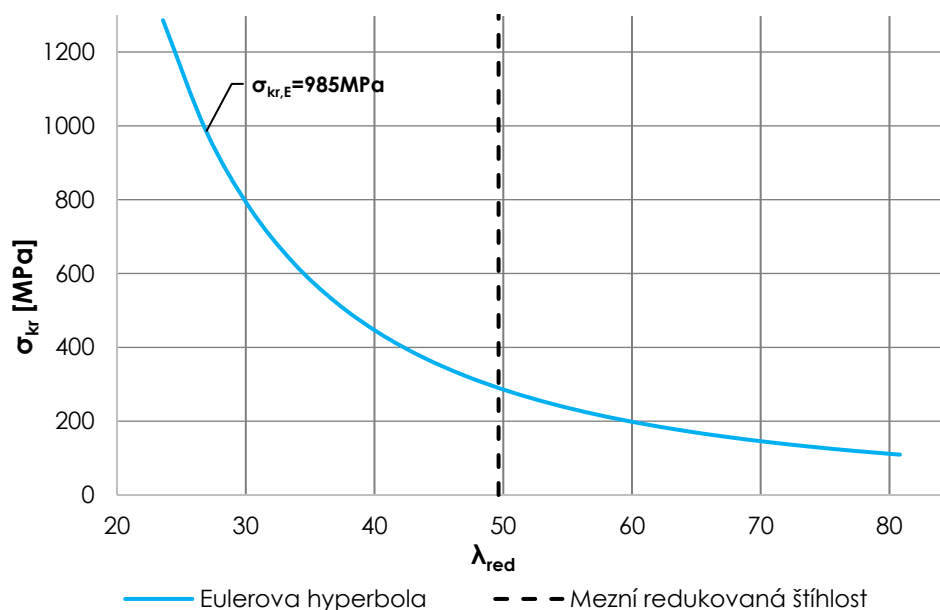
$$\lambda_{red} < \lambda_{m,red}$$

Podle této relace nelze výsledky vypočítané Eulerovou rovnicí použít, avšak pro porovnání s dalšími hodnotami kritickou sílu a napětí dopočítám.

$$F_{kr,E} = c \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2} = 1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 72400 \cdot 259,3}{80^2} = 28950,82 \text{ N}$$

$$\sigma_{kr,E} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{red}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 72400}{26,94^2} = 984,85 \text{ MPa}$$

Dle očekávání vyšla kritická síla, resp. kritické napětí, značně velké a neodpovídá tak realitě. Je to způsobeno překročením mezní redukované štíhlosti, což je hranice použitelnosti Eulerovy metody. Názorně to vystihuje graf 4-1.



graf 4-1 Eulerova hyperbola

4.3 Řešení celkové ztráty stability v nepružné oblasti

4.3.1 Tetmajerova přímka

Tetmajerova přímka je empirický vztah určený ke stanovení kritického napětí vzpěrné stability prutů v případě nepružného vzpěru. To je nutné ověřit porovnáním redukované štíhlosti λ_{red} a mezní redukované štíhlosti $\lambda_{m,red}$. Velikost kritického napětí je poté lineárně aproximováno pomocí přímky, procházející mezi kluzu a mezí pevnosti materiálu viz rovnice (4.5).

$$\sigma_{kr,T} = R_m - \frac{R_m - R_{p0,2}}{\lambda_{mred}} \lambda_{red} \quad (4.5)$$

Tato metoda je vhodná spíše pro robustnější pruty, než jaké jsou tenkostěnné výztužné profily leteckých konstrukcí, které se poruší většinou již při napětí pod mezí kluzu.

- Řešení pomocí Tetmajerovy přímky

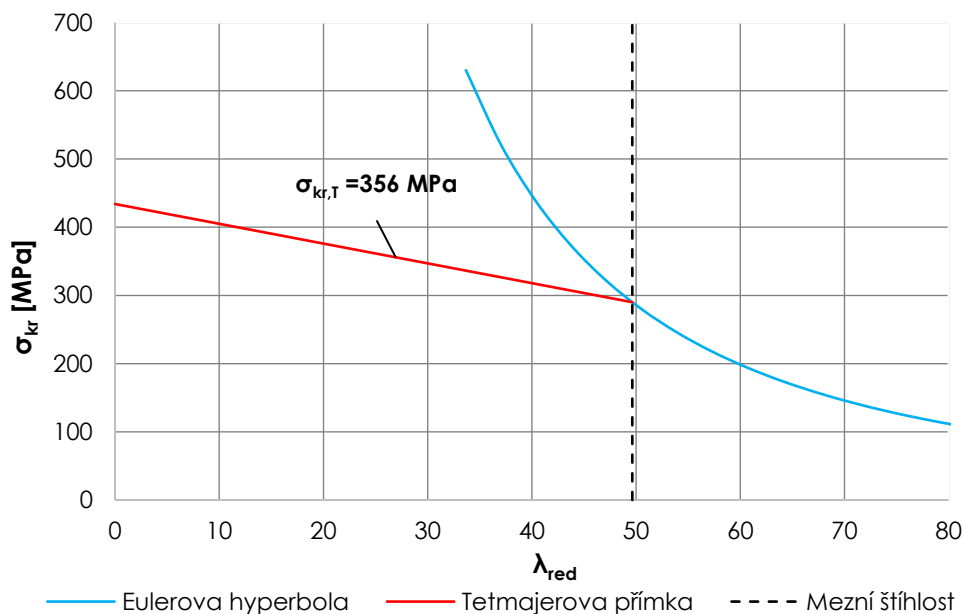
Na základě porovnání redukovaných štíhlostí z předcházejícího výpočtu lze konstatovat:

$$\lambda_{m,red} > \lambda_{red}$$

$$\sigma_{kr,T} = R_m - \frac{R_m - R_{p0,2}}{\lambda_{mred}} \lambda_{red}$$

$$\sigma_{kr,T} = 434 - \frac{434 - 290}{49,64} 26,94 = 355,85 \text{ MPa}$$

Velikost kritického napětí podle Tetmajerovy metody vyšla 356 MPa, což znázorňuje graf 4-2.

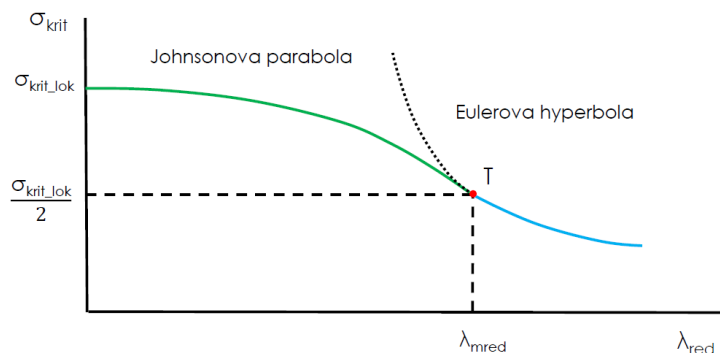


graf 4-2 Tetmajerova přímka

4.4 Řešení ztráty stability v přechodové oblasti

4.4.1 Johnsonova parabola

Johnsonova parabola je další empirický vztah určený ke stanovení kritického napětí zohledňující přechod mezi celkovou a místní ztrátou stability. Daná parabola je tečná k Eulerově hyperbole v bodě T odpovídající mezní štíhlosti $\lambda_{m,red}$ a polovině kritického napětí lokální ztráty stability $\sigma_{kr,lok}$. [5]



obr. 4-4 Johnsonova parabola

Problémem je zvolení tečného bodu T , resp. velikosti kritického napětí při lokální ztrátě stability. Ve svém výpočtu proto použijí hodnotu kritického napětí $\sigma_{kr,lok}$ vypočtenou v kapitole 4.6.2 podle metody Niu.

Dále je nutné vypočítat a porovnat redukovanou štíhlost prutu λ_{red} s mezní redukovanou štíhlostí (4.6) podobně jako u předchozích metod. Pokud vyjde λ_{red} menší než $\lambda_{m,red}$, použije se Johnsonův vztah (4.7).

$$\lambda_{m,red} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{kr,lok}}} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{kr,J} = \sigma_{kr,lok} - \frac{\sigma_{kr,lok}^2}{4\pi^2 E} \lambda_{red}^2 \quad (4.7)$$

- Řešení pomocí Johnsonovy paraboly

Za hodnotu kritického napětí $\sigma_{kr,lok}$ dosadím $\sigma_{kr,N} = 205 \text{ MPa}$ viz 4.6.2.

$$\lambda_{m,red} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E}{\sigma_{kr,N}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot 72400}{205}} = 83,49$$

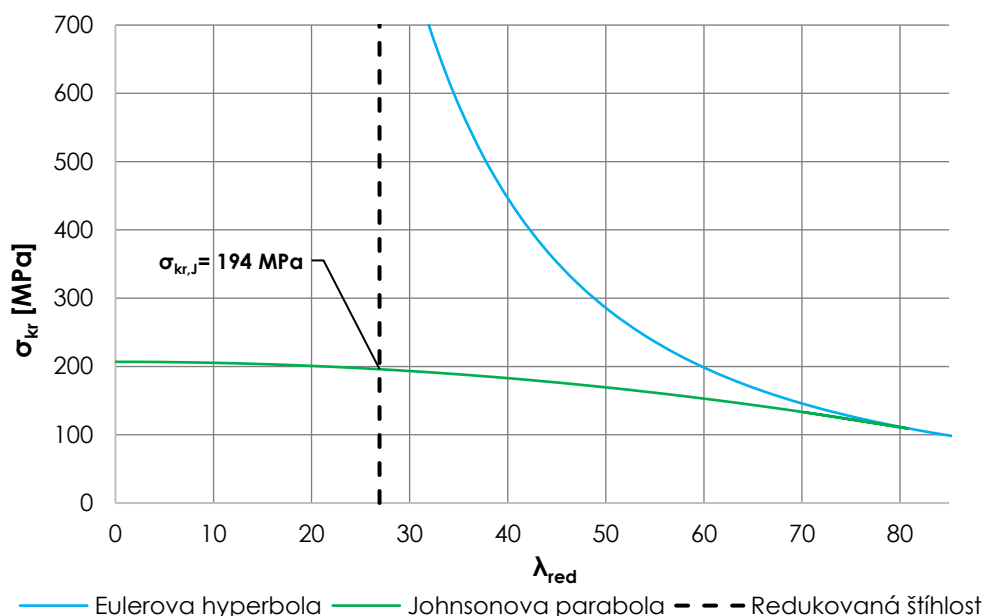
$$26,94 < 83,49$$

$$\lambda_{red} < \lambda_{m,red}$$

$$\sigma_{kr,J} = \sigma_{kr,lok} - \frac{\sigma_{kr,lok}^2}{4\pi^2 E} \lambda_{red}^2$$

$$\sigma_{kr,J} = 205 - \frac{205^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot 72400} \cdot 26,94^2 = 194,33 \text{ MPa}$$

Velikost kritického napětí podle Johnsona je po zaokrouhlení 194 MPa viz graf 4-3.



graf 4-3 Johnsonova parabola

4.5 Zhodnocení metod a výsledků celkové ztráty stability

Jako první jsem provedl výpočet kritické síly pomocí Eulerovy metody. Jelikož redukovaná štíhlost profilu λ_{red} vyšla menší než mezní štíhlosti $\lambda_{m,red}$, nelze výsledky vypočítané Eulerovou rovnicí použít. Pro porovnání s hodnotami dalších metod jsem však dopočítal kritickou sílu a napětí. Hodnota kritického napětí $\sigma_{kr,E}$ vyšla značně veliká a neodpovídá tedy realitě. Eulerova rovnice by mohla být použita až od délky profilu $l=147$ mm, při zachování průřezových a materiálních charakteristik profilu.

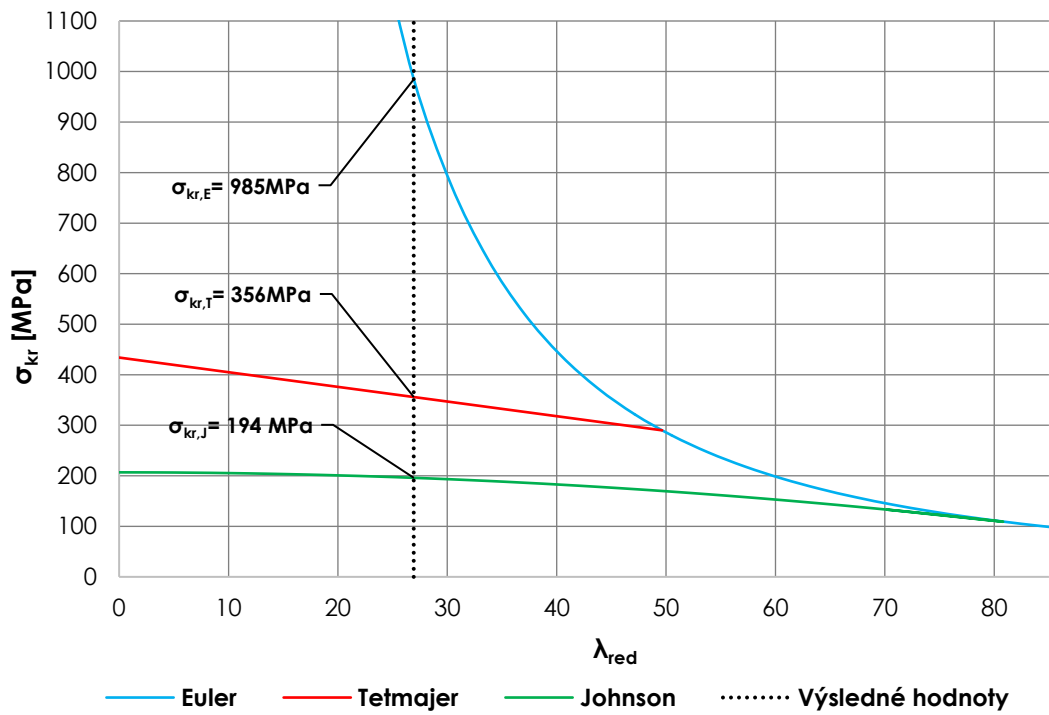
Jako další řešení jsem zvolil Tetmajerovu přímku, která prochází body odpovídající smluvní mezi kluzu a mezi pevnosti. Velikost kritického napětí $\sigma_{kr,T}$ vyšla 356 MPa, což je poměrně vysoká hodnota a pravděpodobně ji nelze u stringeru očekávat.

Nakonec jsem využil Johnsonův parabolický vztah, který by měl dostatečně popisovat přechod od celkové k lokální ztrátě stability. Pro výpočet bylo nutné dosadit kritické napětí lokální ztráty stability, proto jsem vybral hodnotu vypočtenou pomocí metody Niu. Velikost kritického napětí $\sigma_{kr,J}$ vyšla poté 194 MPa, což se zdá být jako jediný adekvátní výsledek z daných metod řešení.

Všechny vypočtené hodnoty kritických sil a napětí jsou uvedeny v tab. 4-4. Rovněž je znázorňuje graf 4-4.

tab. 4-4 Výsledky metod celkové ztráty stability

Celková ztráta stability	F_{KRIT} [N]	σ_{KRIT} [MPa]
Euler	28959	985
Tetmajer	10466,4	356
Johnson	5762,4	194



graf 4-4 Porovnání výsledků celkové ztráty stability

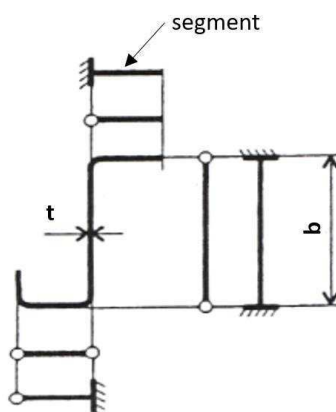
4.6 Řešení místní ztráty stability

4.6.1 Diagram podle Timoshenka

Velikost kritického napětí lokální ztráty stability se určí z experimentálně sestaveného diagramu podle autora Timoshenka viz graf 4-5. Uvažuje se, že některá stěna profilu ztratí stabilitu jako deska, která je různým způsobem uložena v průřezu.

Řešení se provádí v následujících krocích:

- 1) Profil se rozloží na jednotlivé segmenty (desky).
- 2) Rozhodne se o uložení jejich konců (volné, kloubové, vetknuté) podle celkového tvaru, vzájemné velikosti desek, případně způsobu podepření profilu. Pokud je profil protlačovaný, volí se uložení desek v průřezu jako vetknutí, nebo poloviční vetknutí. V případě ohýbaného profilu se vybere kloubová vazba.

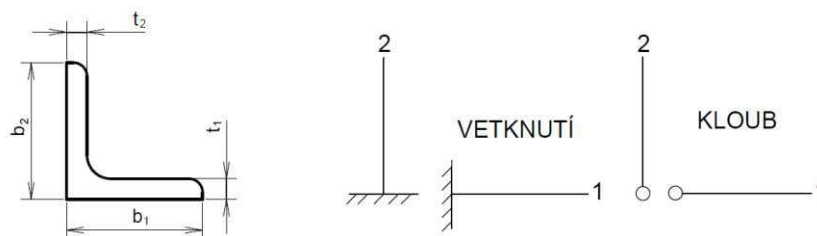


obr. 4-5 Rozložení průřezu na segmenty [6]

- 3) Vypočte se štíhlost průřezu desky b/t , kde b je šířka a t tloušťka desky.
- 4) V diagramu se vybere křivka pro příslušný materiál.
- 5) Z diagramu se odečte kritické napětí, při němž jednotlivé desky ztratí stabilitu.
- 6) Minimální kritické napětí σ_{kr} je hledané místní kritické napětí.

• Řešení podle Timoshenka

V případě L profilu se průřez rozdělí na dvě kolmé desky. Díky tomu, že je profil protlačovaný, volím vzájemné uložení desek jako tzv. poloviční vetknutí a vetknutí viz graf 4-5.



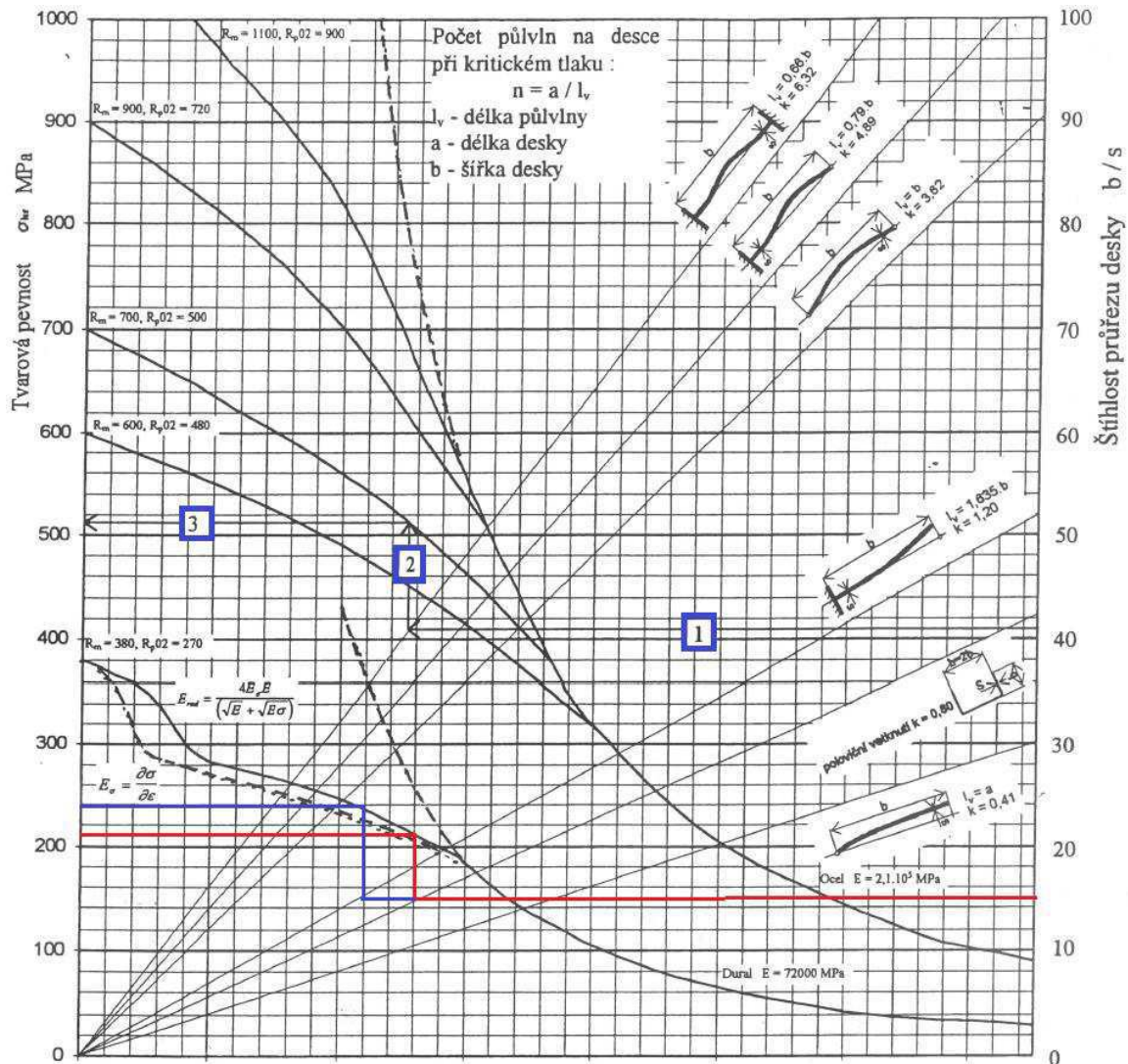
obr. 4-6 Uložení segmentů v průřezu

Štíhlost průřezu desky se určí jako podíl šířky b a tloušťky t . Jelikož je daný profil souměrný, stačí spočítat štíhlost pouze pro jednu desku průřezu.

$$\text{štíhlost} = \frac{b_1}{t_1} = \frac{15}{1} = 15$$

Pro vypočítanou štiřlost a daný materiál profilu se v pořadí (1-2-3) dle diagramu stanoví místní kritická napětí. Jedno pro poloviční vetknutí, druhé odpovídající vetknutí.

V mém případě volím křivku, která byla naměřena pro dural s mezí pevnosti $R_m=380$ MPa a mezí kluzu $R_{p0,2}=270$ MPa. Tyto hodnoty jsou tedy nižší, než u zadaného materiálu 2024-T3.



graf 4-5 Diagram dle Timoshenka [6]

Vzájemnému uložení desek v průřezu vazbou vetknutí odpovídá kritické napětí $\sigma_{kr,T1}$:

$$\sigma_{kr,T1} = 240 \text{ MPa}$$

Polovičnímu vetknutí odpovídá kritické napětí $\sigma_{kr,T2}$:

$$\sigma_{kr,T2} = 210 \text{ MPa}$$

Výsledkem výpočtu lokální ztráty stability podle Timoshenka je hodnota 240 MPa resp. 210 MPa.

4.6.2 Metoda podle Niu

Tato metoda je publikována v učebnici [3], jejíž autor je Michael C. Y. Niu. Kritické napětí se stanoví na základě diagramu pro ohýbaný nebo lisovaný profil viz Příloha č. 1. Jedná se o americkou literaturu, proto je nutné převést jednotky na anglosaské viz tab. 4-5.

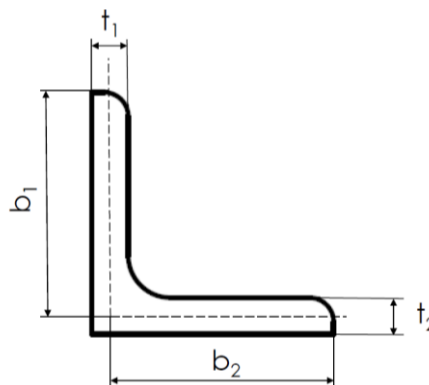
Řešení se provádí v těchto krocích:

- 1) Profil se rozloží na jednotlivé segmenty (desky).
- 2) Každá deska je charakterizována průřezem o šířce b a tloušťce t a má jednu nebo žádnou volnou hranu.
- 3) Velikost místního kritického napětí jednotlivých desek se určí z diagramu pro danou technologii výroby profilu, materiál a počet volných hran desek.
- 4) Velikost místního kritického napětí celého průřezu se poté vypočítá jako aritmetický průměr kritických napětí všech desek v průřezu podle vztahu (4.8).

$$F_{cc} = \frac{\sum b_n t_n F_{ccn}}{\sum b_n t_n} \quad (4.8)$$

- Řešení podle Niu

V případě L profilu se průřez rozdělí na dvě kolmé desky o šířce b a tloušťce t .



obr. 4-7 Rozměry průřezu profilu-Niu

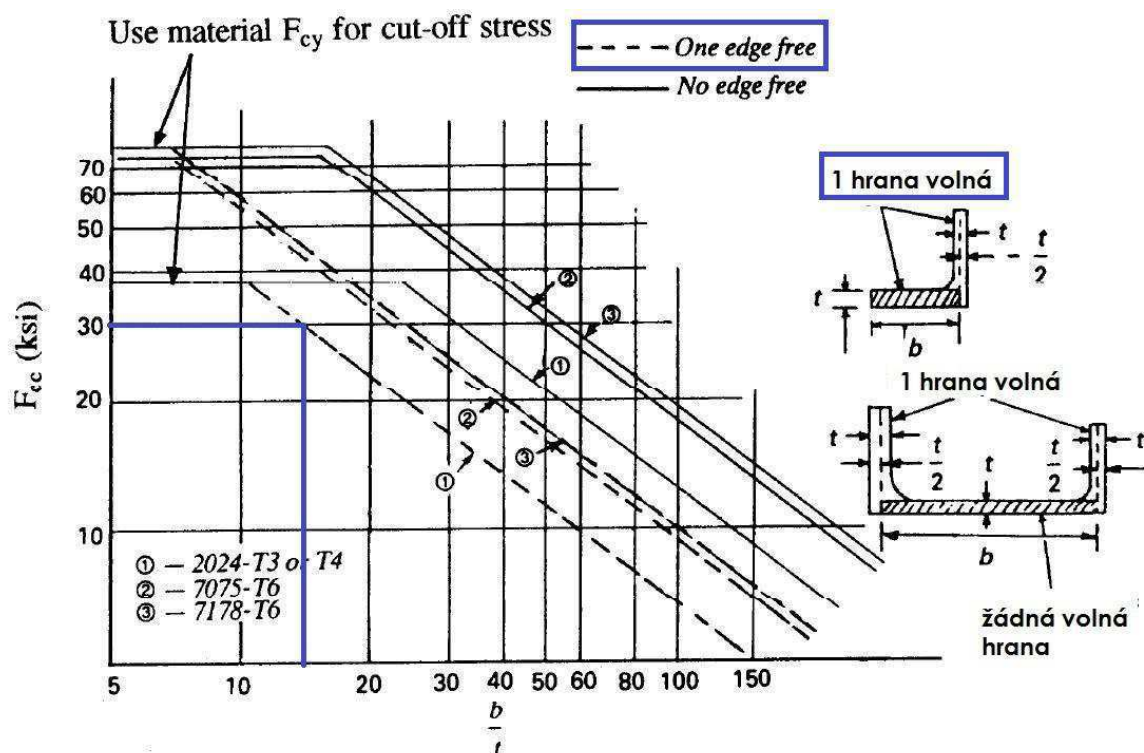
Poté se stanoví štíhlost průřezu desky jako podíl šířky b a tloušťky t . Šířka desky se bere jako vzdálenost od hrany profilu ke střednici viz obr. 4-7. Jelikož je tloušťka desky 1 mm, tak volím délku 14,5 mm. Daný profil je souměrný, a tak stačí spočítat štíhlost pouze pro jednu desku.

tab. 4-5 Převod do anglosaských jednotek

Převod jednotek				
t_1	1	mm	0,039	in
t_2	1	mm	0,039	in
b_1	14,5	mm	0,571	in
b_2	14,5	mm	0,571	in

$$\text{štíhlost} = \frac{b_1}{t_1} = \frac{0,571}{0,039} = 14,64$$

Nyní se z diagramu (obr. 4-8) odečtou kritická napětí jednotlivých desek průřezu F_{cc} . Byl vybrán diagram pro protlačovaný profil a křivka odpovídající materiálu 2024 T3. V případě L profilu se bere, že každá deska v průřezu má jednu volnou hranu. Postup výpočtu je následně shrnut v tabulce tab. 4-6.



obr. 4-8 Místní kritické napětí protlačovaných profilů [3]

tab. 4-6 Postup výpočtu podle metody Niu

Protlačovaný profil 2024 - T3							
segment	volné hrany	b_n [in]	t_n [in]	b_n / t_n	$b_n t_n$ [in ²]	F_{ccn} [ksi]	$t_n b_n F_{ccn}$ [kips]
1	1	0,571	0,039	14,641	0,022	30	0,668
2	1	0,571	0,039	14,641	0,022	30	0,668
Σ					0,045	60	1,336

$$F_{cc} = \frac{\sum b_n t_n F_{ccn}}{\sum b_n t_n} = \frac{1,336}{0,045} = 29,7 \text{ ksi}$$

Po přepočtu na metrické jednotky:

$$\sigma_{kr,N} = 205 \text{ MPa}$$

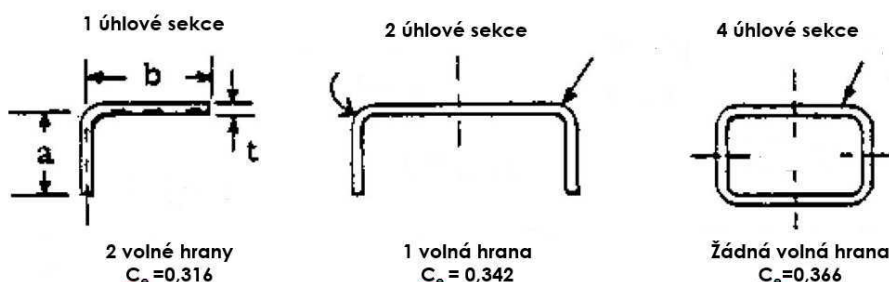
Výsledkem výpočtu lokální ztráty stability podle Niu je hodnota 205 MPa.

4.6.3 Bruhn

Další způsob řešení lokální ztráty stability je prezentován v učebnici [4] a to pod názvem *Angle method (Needham method)*. Jedná se opět o empirický vztah vzniklý na základě mnoha měření a experimentů. Touto metodou lze počítat pouze ohýbané profilu.

Řešení se provádí v těchto krocích:

- 1) Celý profil se rozloží na tzv. úhlové sekce v závislosti na geometrii daného průřezu.
- 2) Každá sekce je charakterizována průřezem o šířce a (b) a tloušťce t a má různý počet volných hran viz obr. 4-9.



obr. 4-9 Určení úhlových sekcí průřezu [4]

- 3) Velikost kritického napětí F_{cs} jednotlivých sekcí průřezu se určí z diagramu (graf 4-6) pro daný materiál a počet volných hran sekce.

Lze rovněž dosadit do vztahu (4.9) a přímo vypočítat místní kritické napětí dané sekce F_{cs} . Koeficient C_e závisí na počtu volných hran viz obr. 4-9, F_{cy} je mez kluzu v tlaku a poměr b/t vyjadřuje štíhlost úhlové sekce.

$$\frac{F_{cs}}{\sqrt{F_{cy}E}} = \frac{C_e}{\left(\frac{b}{t}\right)^{0,75}} \quad (4.9)$$

- 4) Velikost kritického napětí celého průřezu F_{cc} se vypočítá jako podíl kritických napětí jednotlivých sekcí F_{cs} dle vztahu (4.10), kde S je plocha příčného průřezu celého profilu.

$$F_{cc} = \frac{\sum F_{cs}}{\sum S} \quad (4.10)$$

• Řešení

Jako první je potřeba převést jednotky materiálových veličin do anglosaských, konkrétně modul pružnosti E a mez kluzu F_{cy} .

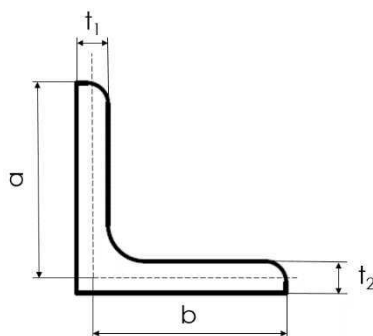
tab. 4-7 Převedení do anglosaských jednotek

Převedení jednotek				
F_{cy}	290	Mpa	42061	psi
E	72400	Mpa	10500728	psi

Poté se stanoví štíhlost průřezu sekce jako podíl šířky (a, b) a tloušťky t . Délka ramene sekce se bere jako vzdálenost od hrany ke střednici viz obr. 4-10, tedy obdobně jako u metody Niu.

tab. 4-8 Převod do anglosaských jednotek

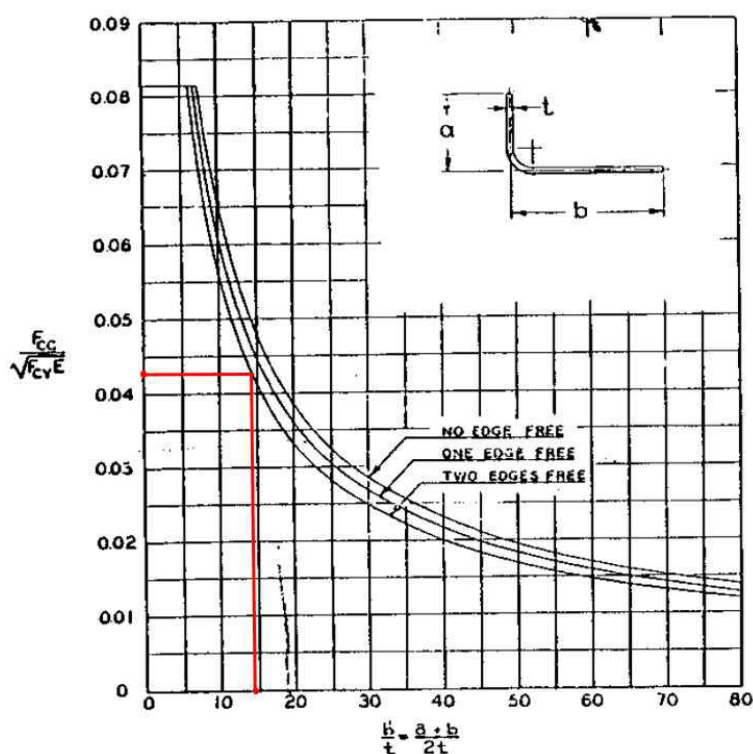
Převod jednotek				
t_1	1	mm	0,039	in
t_2	1	mm	0,039	in
a	14,5	mm	0,571	in
b	14,5	mm	0,571	in



obr. 4-10 Rozměry průřezu profilu-Bruhn

$$\text{štíhlost} = \frac{a + b}{2t} = \frac{0,571 + 0,571}{2 \cdot 0,039} = 14,64$$

Vyberu diagram pro daný materiál 2024 T3, konkrétně křivku pro dvě volné hrany viz graf 4-6. Z ní se odečte na svislé ose poměr odpovídající vypočtené štíhlosti.



graf 4-6 Diagram Bruhn [4]

$$\frac{F_{cs}}{\sqrt{F_{cy}}E} = 0,0425$$

$$F_{cs} = 0,0425 \sqrt{F_{cy}E}$$

L profil je tvořen pouze jednou úhlovou sekcí. Proto celkové kritické napětí profilu F_{cc} bude rovno kritickému napětí jedné sekce F_{cs} .

$$F_{cc} = F_{cs} = 0,0425 \cdot \sqrt{42061 \cdot 10500728} = 28244,8 \text{ psi}$$

Po přepočtu na metrické jednotky je velikost kritického napětí lokální ztráty stability dle Bruhna

$$\sigma_{kr,B} = 194 \text{ MPa}$$

4.7 Zhodnocení metod a výsledků místní ztráty stability

Výpočty byly prováděny pro lisovaný profil L 15x15x1-80. Materiál profilu je dural s označením 2024-T3 s minimální smluvní mezí kluzu $R_{p0,2}=290$ MPa a modulu pružnosti $E=72400$ MPa.

Tyto tři metody jsou založeny na empirických vztazích, což znamená že jsou odvozeny z experimentů. Mezi výsledky několika sad měření byla proložena křivka, takže jsou zohledněny reálné podmínky i reálná geometrii včetně rozptylu materiálových vlastností po výrobě. Problémem je, že každý autor prováděl měření pro jiný materiál o jiném tepelném zpracování. Timoshenko používal ruské materiály D16čT s mezí pevnosti 380MPa viz graf 4-5. Niu a Bruhn využívali americký ekvivalent 2024-T3, který má mez pevnosti vyšší.

Nejprve jsem tedy provedl výpočet podle Timoshenka, a to pro dva způsoby uložení. Tyto případy vazeb byly zvoleny na základě technologie výroby profilu protlačováním. Vzájemnému uložení desek v průřezu vazbou vetknutí tak odpovídá kritické napětí 240 MPa a polovičnímu vetknutí 210 MPa. I přes to, že je diagram sestaven pro materiál s nižšími mechanickými vlastnostmi, tak kritické napětí vyšlo vyšší než u ostatních metod. Metoda podle Timoshenka je tak nejméně konzervativní.

Jako další způsob řešení jsem vybral metodu podle literatury Niu. Tento diagram je naměřen přímo pro materiál 2024-T3, tedy materiál mého vzorku. Kritické napětí v tomto případě vyšlo 205 MPa.

Poslední metoda vychází z publikace od autora Bruhna a má název *Needham method*. Hodnota kritického napětí vyšla nejmenší v porovnání s ostatními, a to 194 MPa. Je to způsobeno tím, že se daná metoda používá k výpočtům ohýbaných profilů, které mají v porovnání s lisovanými profily nižší tuhost.

tab. 4-9 Výsledky metod místní ztráty stability

Místní ztráta stability	F_{KRIT} [N]	σ_{KRIT} [MPa]
Timoshenko	6174	210
Niu	6027	205
Bruhn	5704	194

4.8 Závěrečné porovnání výsledků analytických řešení

Provedl jsem celkem šest způsobů výpočtů kritického napětí výztužného L profilu, a to pro všechny možné způsoby ztráty stability. Z porovnání redukované štíhlosti profilu a mezní redukované štíhlosti lze usoudit, že nenastane celková ztráta stability v elastické oblasti. Nepružný vzpěr rovněž není pravděpodobný, a to z důvodu řešení stability štíhlého tenkostěnného profilu, který nemá takovou únosnost.

Lze proto očekávat nějakou formu poruchy blížíci se lokální ztrátě stability, což potvrzují i podobné výsledky hodnot kritických napětí pomocí Johnsonovy metody a metod lokální ztráty stability.

tab. 4-10 Souhrn výsledků analytických řešení

Celková ztráta stability	F_{KRIT} [N]	σ_{KRIT} [MPa]
Euler	28959	985
Tetmajer	10466	356
Johnson	5762	194
Místní ztráta stability	F_{KRIT} [N]	σ_{KRIT} [MPa]
Timoshenko	6174	210
Niu	6027	205
Bruhn	5733	194

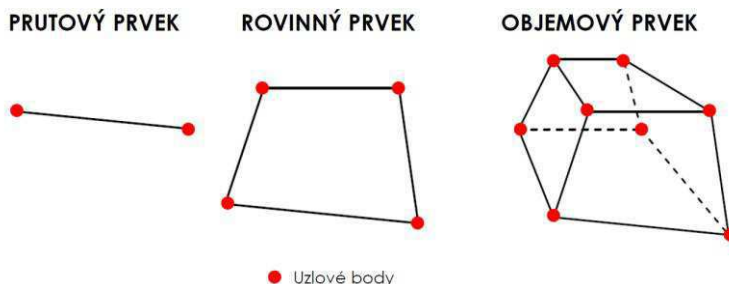
Výsledky analytických metod mohou být využity pro předběžné inženýrské výpočty, které poslouží k ověření např. numerického řešení pomocí metody konečných prvků. Proto tyto výsledky nadále využiji v kapitole 6.

5 SIMULACE METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

Metoda konečných prvků (MKP) patří v současné době k nejpoužívanějším prostředkům napěťově deformační analýzy včetně úloh spojených se ztrátou stability. Výhodou oproti analytickému řešení je možnost řešit libovolně geometricky složitá tělesa. Výsledky jsou vždy však jen přibližné a závislé mj. na vhodném zvolení diskretizace². Na výsledky je proto nutné vždy nahlížet kriticky a verifikovat je až na základě porovnání s analytickým řešením nebo s hodnotami získanými experimentálním měřením.

5.1 Stručný popis principu MKP

Principem metody konečných prvků je rozdělení (diskretizace) spojitého objemu tělesa konečným počtem elementů (prvků). Tyto elementy poté tvoří tzv. síť, která reprezentuje původní geometrii daného tělesa. MKP využívá nejčastěji deformační přístup, kdy hledanými neznámými funkcemi jsou deformační posuvy. Ty se hledají v krajních bodech elementu, tzv. uzlech. Každý prvek je popsán maticí tuhostí, která převádí zatížení elementu na posuv uzlových bodů.



obr. 5-1 Typy konečných prvků [10]

Z matematického hlediska se k řešení využívá variačního počtu, pomocí kterého se hledá minimum funkcionálu, kterým je v případě MKP celková potenciální energie tělesa Π . Je definována jako rozdíl celkové energie napjatosti tělesa W a potenciálu vnějšího zatížení P .

$$\Pi = W - P \quad (5.1)$$

Po zavedení globální matice tuhosti a aplikaci okrajových podmínek lze vyřešit neznámé deformační posuvy. Z nich je poté možné určit pomocí geometrických rovnic složky tenzoru přetvoření a z nich poté pomocí konstitutivních vztahů složky tenzoru napětí. [10]

5.2 Výpočetní software

Ve své práci využívám software od firmy MSC, konkrétně MSC Patran a MSC Nastran. Licence jsou dostupné na Leteckém ústavu VUT v Brně, kde mi bylo umožněno tyto programy využívat.

² Rozdělení tělesa na konečný počet prvků

5.3 Příprava výpočtového modelu

Celý proces numerického řešení zahrnuje řadu operací a nastavení, které předcházejí samotné simulaci. Prvním krokem je příprava výpočtového modelu a vstupních dat výpočtu, tzv. preprocesing. V této části využívám program MSC Patran, kterému je možné nadefinovat všechny potřebné parametry a vytvořit tak soubor, který bude vstupem řešiči.

5.3.1 Vstupní geometrie

Jako první je nutné vytvořit geometrii tělesa, která bude podkladem pro vytvoření sítě konečných prvků. Je možné ji nainportovat z jiného softwaru ve vhodném formátu, nebo vytvořit přímo v prostředí preprocesoru. V mém případě jsem model geometrie vytvořil přímo v programu MSC Patran.

5.3.2 Volba typu prvku

Volba vhodného prvku závisí na konkrétním typu úlohy. Jelikož ve své práci řeším stabilitu profilu, musím vybrat takový prvek, který dokáže nejlépe vystihnout chování při ztrátě stability.

Vytvořil jsem proto tři výpočtové modely pomocí prutových, skořepinových a objemových prvků a provedl jejich vzájemné porovnání na geometrii profilu L-15x15x1-80. Modely byly bez počátečních imperfekcí a zatíženy deformačně osovým posuvem o 0,5mm.

Chování jednotlivých typů prvku vyjadřuje graf 5-1.

- Prutový prvek (1D, beam)

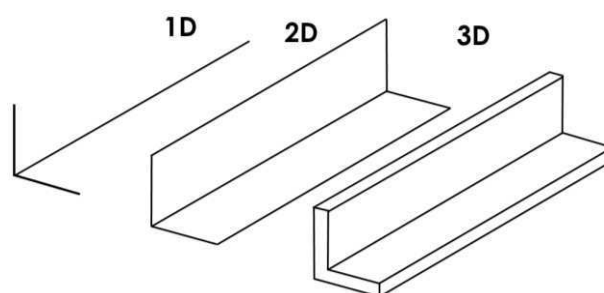
Prutový prvek je jednoduchý a nejméně náročný na přípravu modelu. Stačí vytvořit model střednice, což je přímka rovná délce prutu, které se přiřadí konkrétní příčný průřez. Okrajové podmínky se poté aplikují přímo na střednici.

- Skořepinový prvek (2D, shell)

Skořepinový prvek je tvořen střednicovými plochami. Okrajové podmínky jsou aplikovány do řídicího bodu MPC³ viz 5.3.4. Díky tomu dojde k rovnoměrnému rozdělení zatížení na celý profil.

- Objemový prvek (3D, solid)

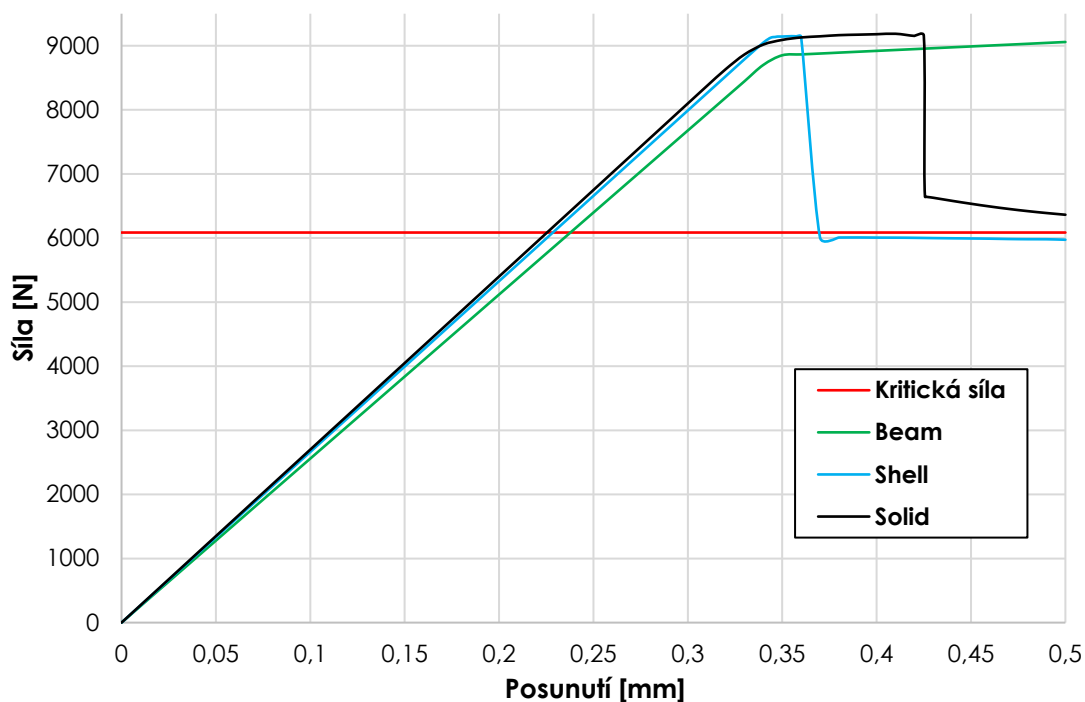
Model tvořený objemovými prvky je v porovnání s prutovým náročnější na přípravu. Nejprve je nutné nakreslit tvar příčného průřezu a provést jeho vytažení do prostoru. Sít' je poté tvořena nejčastěji hexagonálními prvky (krychle). Z důvodu velkého množství uzlových bodů trvá výpočet v porovnání s ostatními typy déle. Okrajové podmínky jsou aplikovány opět do řídicího bodu.



obr. 5-2 Způsoby vytvoření modelu

³ Multipoint connection, z angl. vícebodové spojení

Porovnání vlivu typu prvku na stabilitu: L 15x15x1-80

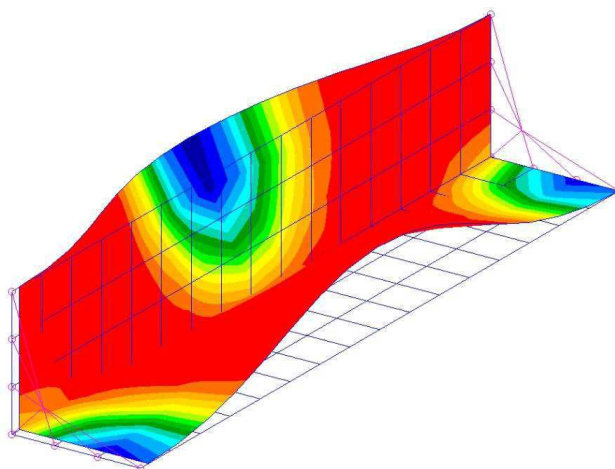


graf 5-1 Vliv typu prvku na stabilitu

Ze závislosti popisující chování modelu tvořeného prutovými prvky (beam) je patrná nižší tuhost v porovnání s ostatními typy, jelikož síla narůstá s menší směrnici. V tomto případě nenastane ani typický pokles síly, pouze dojde k výraznému snížení tuhosti a síla opět narůstá.

Objemový prvek se do okamžiku poklesu tuhosti chová stejně jako prvek skořepinový. Ztráta stability nastane také při stejné velké kritické síle, avšak při větším stlačení.

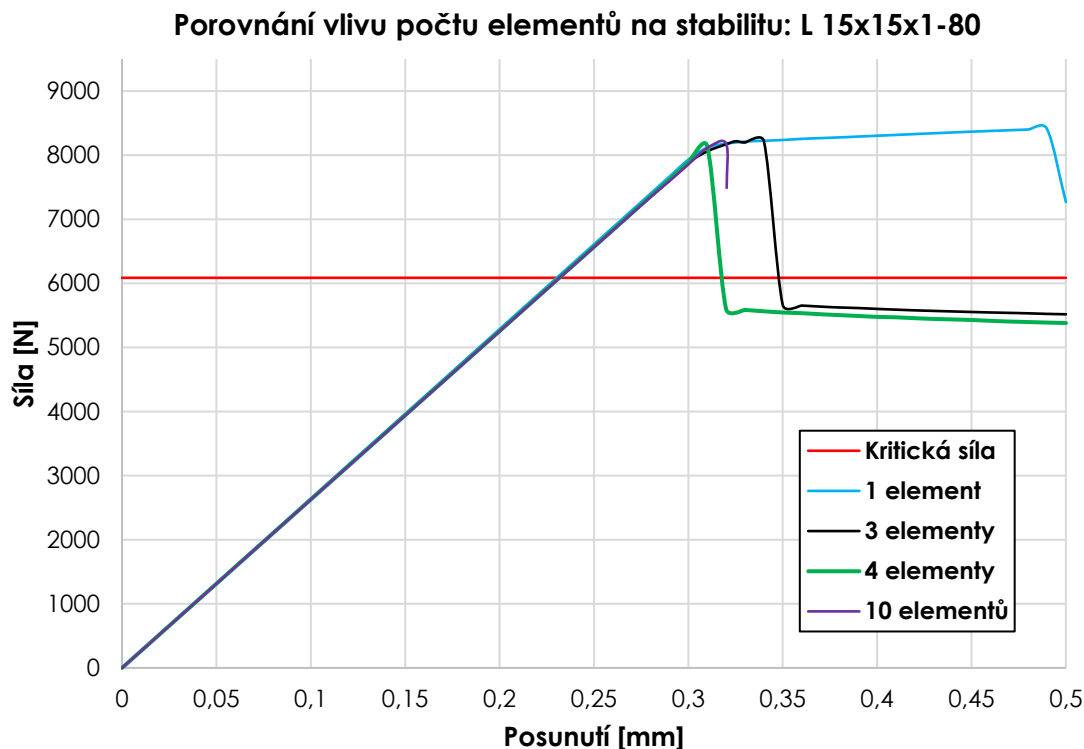
Z porovnání vychází dle mého názoru nejlépe právě skořepinový prvek. Z grafu je zřejmé, že po dosažení kritické síly dojde k náhlému poklesu síly, což realisticky popisuje chování při vybočení profilu. Tento typ prvku je rovněž schopen dobře postihnout geometrii tenkostěnných leteckých konstrukcí, průběh deformací průřezu i chování při ztrátě stability viz obr. 5-3.



obr. 5-3 Skořepinový model po vybočení

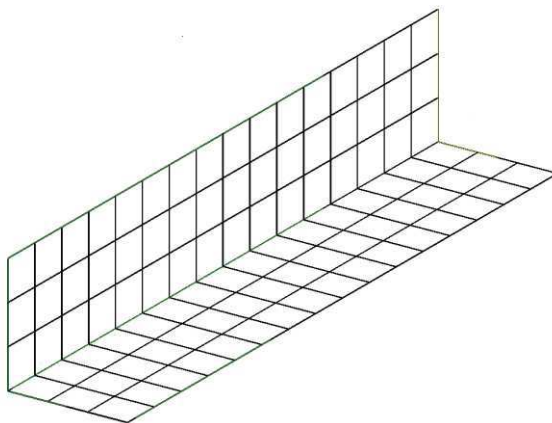
5.3.3 Vytvoření sítě

Z předchozí části mám zvolený typ prvku a nyní je potřeba provést diskretizaci, tedy úplně nahrazení geometrie sítě konečných prvků. Tato část je stěžejní z důvodu přesnosti výsledků a doby trvání výpočtu. Proto jsem si vykreslil závislosti čtyř modelů s různou hustotou sítě viz graf 5-2.



graf 5-2 Vliv počtu elementů na stabilitu

Pokud porovnám velikosti kritických sil, tak vyšly pro všechny případy přibližně stejně, a to v rozmezí od 8139 N do 8218 N. Výjimkou je model s jedním elementem, u kterého vyšla kritická síla 8409 N. Tento model zároveň vykazuje výrazný pokles síly až při velkém stlačení. U ostatních případů s třemi, čtyřmi a deseti elementy není rozdíl ve stlačení tak výrazný. Model s deseti elementy je podle mého názoru zbytečný, jelikož se chová podobně jako model se třemi a čtyřmi elementy. Navíc by větší počet elementů prodloužil dobu výpočtu, což je nežádoucí. Po konzultaci se svým vedoucím práce byl nakonec vybrán model se třemi elementy na výšku profilu viz obr. 5-4.

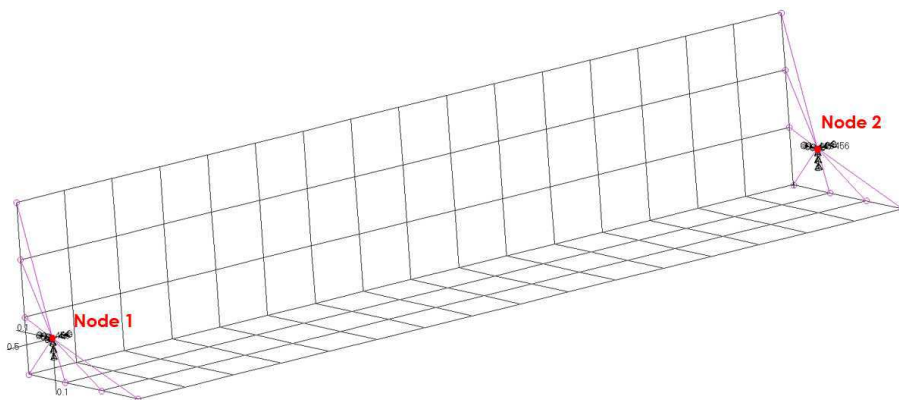


obr. 5-4 Vybraná síť

5.3.4 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky se týkají zatížení a uložení tělesa. V případě numerického řešení je důležité, aby bylo těleso uloženo vždy nepohyblivě. Z toho důvodu volím vazbu vetknutí, která odebírá všechny stupně volnosti. Aplikuji ji do řídicího bodu, konkrétně uzlu (Node 2) viz obr. 5-5.

Zatížení profilu definuji jako deformační posuv ve všech třech osách a zvolím ho do druhého řídicího bodu (Node 1). V ose z, tj. v ose prutu, je nastaveno stlačení 0,5 mm. V osách x a y je nastaven posuv 0,1 mm, a to z důvodu vytvoření excentrického zatížení. Tímto je poté simulace realističtější.



obr. 5-5 Okrajové podmínky

V případě analytického řešení viz 4.2 jsem volil uchycení prutu kloubovou vazbou. To byl však případ výpočtu celkové ztráty stability, která ve skutečnosti nenastane. Na základě porovnání výsledků v kapitole 4.7 jsem stanovil, že se profil poruší vlivem lokální ztráty stability, tedy vybočením některé stěny profilu. V případě lokální ztráty stability není vliv uložení a délky profilu tak významný, jako spíše tvar příčného průřezu.

5.3.5 Volba materiálu

Dále je nutné přiřadit všem prvkům materiálové parametry, které jsem definoval v kapitole 4. V případě izotropního elastického materiálu to jsou modul pružnosti v tahu E a Poissonova konstanta μ . [10]

Při řešení nelineárních úloh s velkými deformacemi a napětími je nutné nadefinovat i materiál nelineární. V mém případě však není potřeba, protože se pohybují v elastické oblasti, kde se materiál chová lineárně v souladu s Hookovým zákonem.

5.3.6 Typ analýzy

Typ analýzy určuje způsob řešení dané úlohy. V mém případě chci určit při jak velké síle a jakým způsobem dojde ke ztrátě stability daného výztužného profilu. Aby byla simulace co nejvíce věrohodná, musím brát v úvahu nelineární deformaci stringeru, o čem jsem psal v kapitole 3.1.

Nelineární úlohy se v MKP řeší tak, že se celkové zatížení přidává na těleso v několika krocích od nuly až do maximální nastavené hodnoty. Tím se docílí, toho že se zatížení aplikuje již na deformované těleso, které se zdeformovalo v předchozím kroku. Může se tak sledovat přesná odezva profilu na postupně rostoucí zatížení. [9]

Po konzultaci se svým vedoucím práce byl zvolen řešič označený v softwaru Nastran jako 106 (nonlinear static⁴), který výše popsané vlastnosti splňuje a umožňuje zatížení rozdělit do jednotlivých kroků. V mém případě jsem jich nastavil padesát, což znamená, že zatížení bude přidáváno postupně po dvou procentech.

Jiné způsoby analýz prováděny nebyly, a to z důvodu velké rozsáhlosti provedených výpočtů.

Při zadávání okrajových podmínek jsem nastavil deformační posuv v ose prutu 0,5 mm. Znamená to tedy, že při x % zatížení dojde ke stlačení profilu o hodnotu Δl .

$$\Delta l = \frac{0,5 \cdot x}{100} \quad (5.2)$$

5.3.7 Výpočtový model

Na základě předchozích analýz jsem vybral konečnou podobu výpočtového modelu:

- Skořepinový prvek (shell)
- Síť se třemi prvky po výšce profilu
- Okrajové podmínky aplikovány do řídicích bodů MPC
- Lineární materiál
- Nelineární analýza 106

Reálného chování modelu docílím však až přidáním optimální velikosti geometrických imperfekcí, kterému se podrobně věnuji v kapitole 5.5.

5.4 Numerický výpočet

Numerický výpočet je prováděn pomocí algoritmu výpočtového programu, tzv. solveru, do kterého je nutné importovat soubor, který v sobě obsahuje data zadaná v části preprocesingu. Z těchto dat je pak výpočetní program schopen vyřešit soustavu rovnic s neznámými hodnotami posuvů. [10]

Jako výpočetní program využívám program MSC Nastran, do kterého importuji údaje z tzv. *bdf.* souboru, který je vytvořen na základě preprocesingu v programu Patran. Výstupem řešiče je poté soubor *xdb.*, který je zpět importován do prostředí Patran, kde je možné provést výslednou analýzu (postprocessing).

5.4.1 Postprocessing

V programu Patran mohu nyní provést zpracování výsledků, které spočívá ve vykreslení napětí a deformací. V kartě Results je možné vytvořit simulaci, ze které je patrné chování tělesa při postupném zatěžování. Konkrétní číselné hodnoty sil, napětí, přetvoření atd. je možné vypsát do textového souboru *rpt.* v kartě Report. Příklad výpisu uvádím v Příloha č. 4. Tyto hodnoty jsem dále zpracovával v programu Excel ve formě tabulek a grafů viz Příloha č. 5.



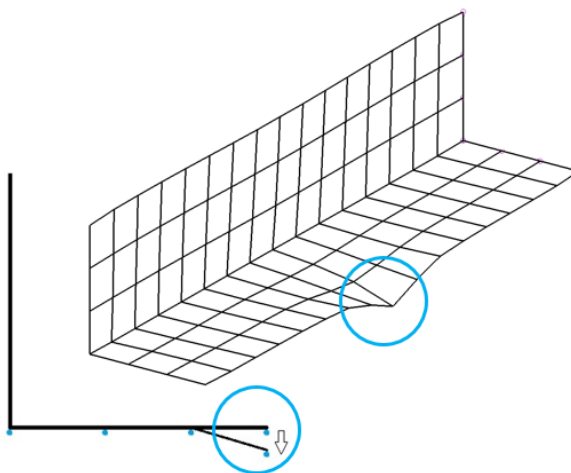
obr. 5-6 Chronologie řešení

⁴ Z angl. nelineární strukturální analýza

5.5 Porovnání vlivu imperfekcí na stabilitu výztužného profilu

Jak bylo uvedeno v předchozí části, imperfekce mají značný vliv na ztrátu stability. Pokud bych imperfekce neuvažoval, vyšla by kritická síla o dost vyšší, než je reálné. To je však z hlediska bezpečnosti nepřijatelné.

Proto je nutné tyto odchylky uměle vytvořit a vhodně nastavit jejich velikost při každé simulaci. Kromě imperfekce zatížení, kterou jsem zavedl při nastavení okrajových podmínek, budu v této části porovnávat vliv geometrických imperfekcí. Ty lze vytvořit posunutím uzlových bodů sítě o různou hodnotu.



obr. 5-7 Příklad vytvoření imperfekce posunem uzlového bodu

Otázkou je, které uzlové body posunout a o jakou hodnotu. Existuje samozřejmě mnoho variant řešení. V mém případě jsem se rozhodl porovnat několik způsobů posunutí uzlových bodů viz následující rozdělení:

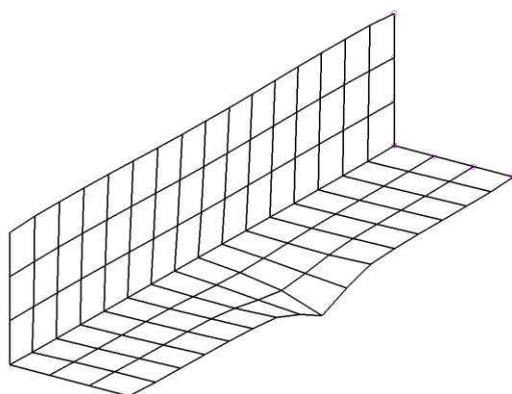
- A. Posun prostředního uzlu na jedné hraně profilu
- B. Střídavý posun všech uzlových bodů na jedné hraně profilu
- C. Střídavý posun všech uzlových bodů na obou hranách profilu
- D. Střídavý posun všech uzlových bodů na jedné stěně profilu
- E. Střídavý posun všech uzlových bodů na obou stěnách profilu

Velikost vychýlení jednotlivých uzlů je možné provádět přepsáním původní hodnoty v textovém souboru *bdf*. Tímto způsobem jsem tedy měnil velikost imperfekcí a pozoroval vliv na velikost kritické síly. Tato síla je poté počítána jako reakce ve vazbě vetknutí, tedy v uzlovém bodě s označením Node 2.

Hlavním požadavkem je, aby se výsledky numerického řešení nacházely v tolerančním pásmu 10 % od hodnoty kritické síly získané experimentem. Potom může být simulace hodnocena přijatelně. Toto porovnání s experimentem bude součástí kapitoly 6.

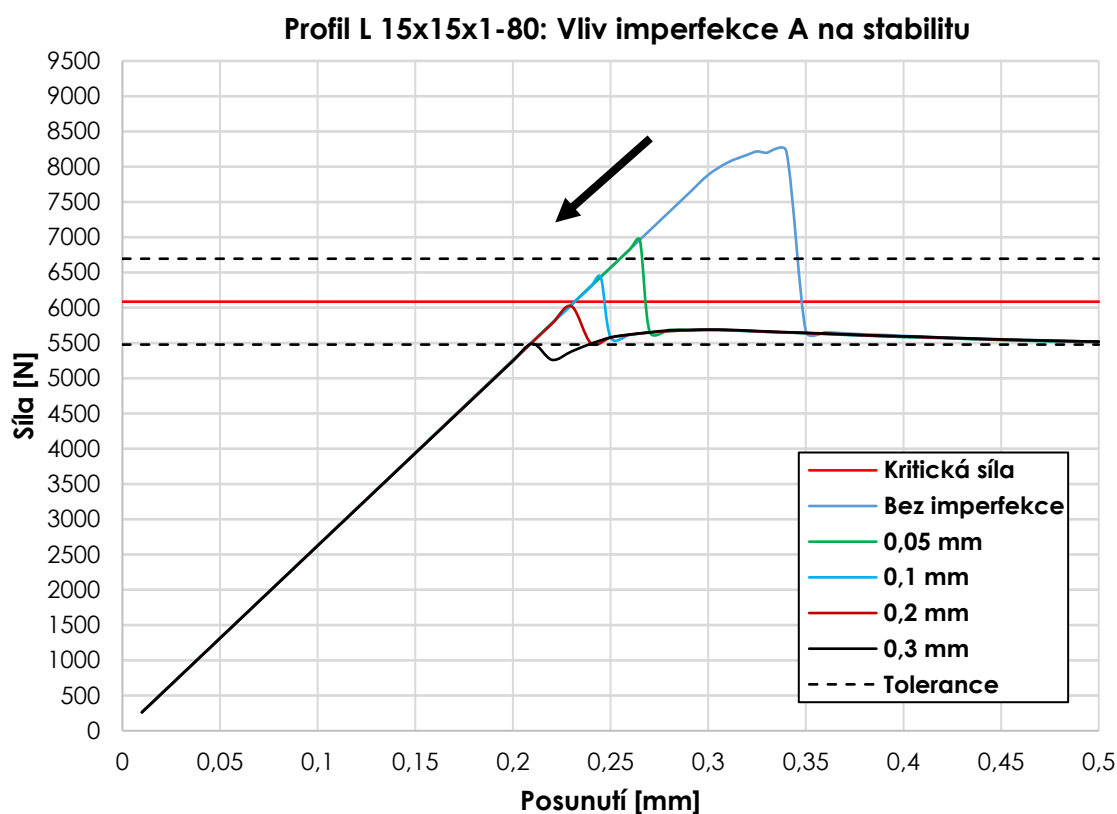
5.5.1 Posun prostředního uzlu na hraně profilu (A)

U prostředního uzlu s označením Node 35 viz obr. 5-8 jsem postupně nastavoval velikost jeho posunutí z původní pozice a sledoval, jaký vliv to bude mít na výslednou kritickou sílu při ztrátě stability. Posun jsem nastavil nejprve na nulovou hodnotu, tedy bez imperfekce a poté postupně zvětšoval výchylku do hodnoty 0,3 mm. Výsledky simulace jsou uvedeny v tab. 5-1 a průběhy zobrazeny v graf 5-3.



obr. 5-8 Imperfekce prostředního bodu

Kritická síla v graf 5-3 (červená) je pouze pomocná hodnota pro orientaci, kde se asi s výpočtem nacházím. Je to průměrná hodnota maximálních sil z osmi testů. Detailní porovnání s výsledky experimentálního měření je uvedeno až v kapitole 6.



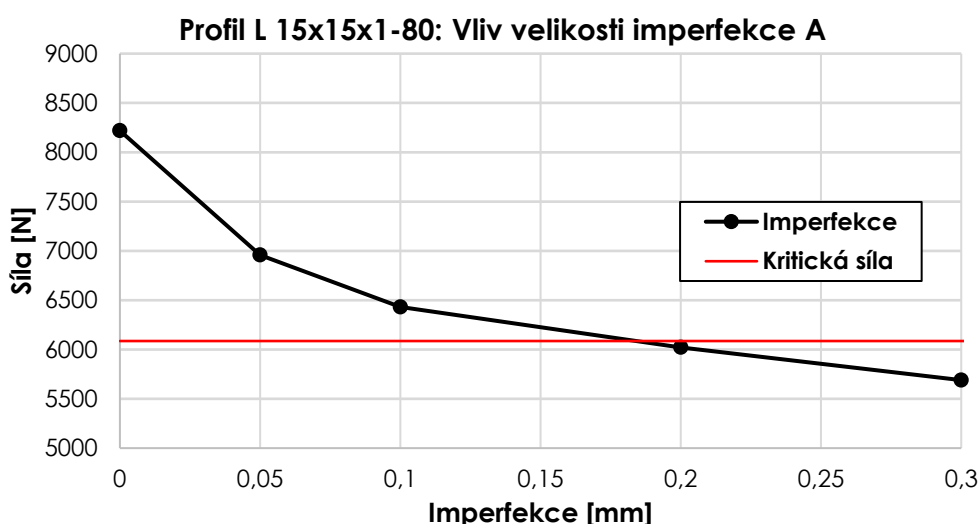
graf 5-3 Vliv imperfekce jednoho bodu

Z grafu je velmi dobře vidět, že modely mají stejnou tuhost, jelikož síla roste ve všech případech se stejnou směrnicí. Rozdíly jsou však ve velikosti kritických sil. Je zde patrný jasný trend poklesu kritické síly se vzrůstající velikostí imperfekce. V tolerančním pásmu se však nachází pouze modely s imperfekcí 0,1 mm a 0,2 mm. Model s posunem prostředního uzlu 0,3 mm se hranice dotýká.

tab. 5-1 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce A

Imperfekce [mm]	Kritická síla [N]	Kritické napětí [Mpa]
0	8219	280
0,05	6958	237
0,1	6431	219
0,2	6022	205
0,3	5689	194

Následující graf 5-4 vyjadřuje závislost kritické síly na velikosti imperfekce (posunu prostředního uzlu). Mezi vypočtenými hodnotami je provedena interpolace, z které je možné určit trend poklesu kritické síly v závislosti na velikosti imperfekce. Lze tak přibližně odhadnout, při jak velké imperfekci bude dosaženo průměrné kritické síly naměřené při experimentu.

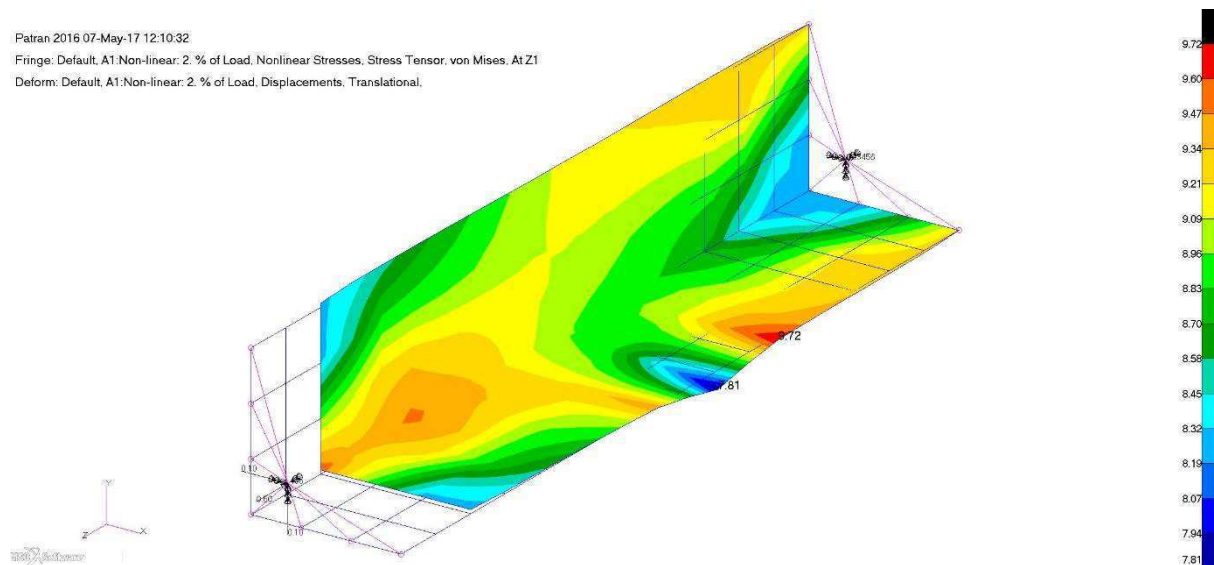


graf 5-4 Trend kritické síly A

Z grafu je patrný trend poklesu kritické síly s rostoucí velikostí imperfekce. Od hodnoty 0,1 mm se jedná v podstatě o lineární závislost. Při dalším zvětšování imperfekcí lze očekávat stejný trend, avšak větší hodnoty imperfekcí by již nebyly vhodné z hlediska velkého zásahu do geometrie.

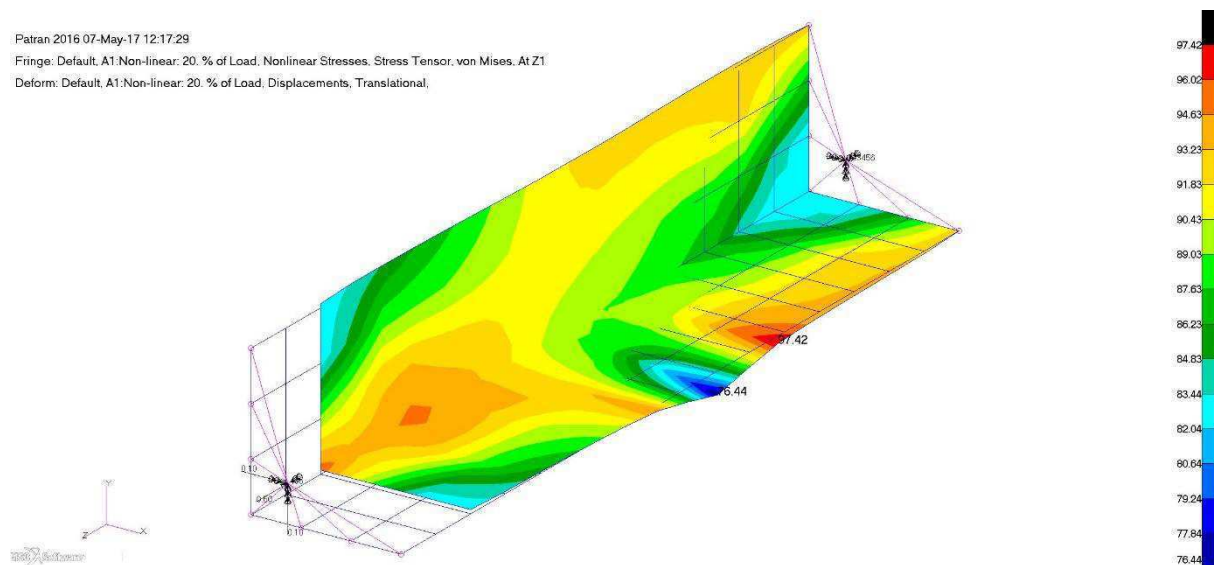
Nejblíže tedy vychází model s posunem prostředního uzlu 0,2 mm. Následující obrázky znázorňují chování modelu s touto imperfekcí při postupném zatěžování. Ve všech případech je vykresleno napětí podle podmínky HMM.

Začíná se od 2 % zatížení, což představuje stlačení profilu o 0,01 mm. Jsou zde znázorněny místa maxima a minima redukovaného napětí podle podmínky HMM. Nejmenší napětí je v místě imperfekce a odpovídá 7,81 MPa. Z obr. 5-9 je patrná nesymetričnost napětí podél celého profilu, což je to dáno excentrickým zatížením.



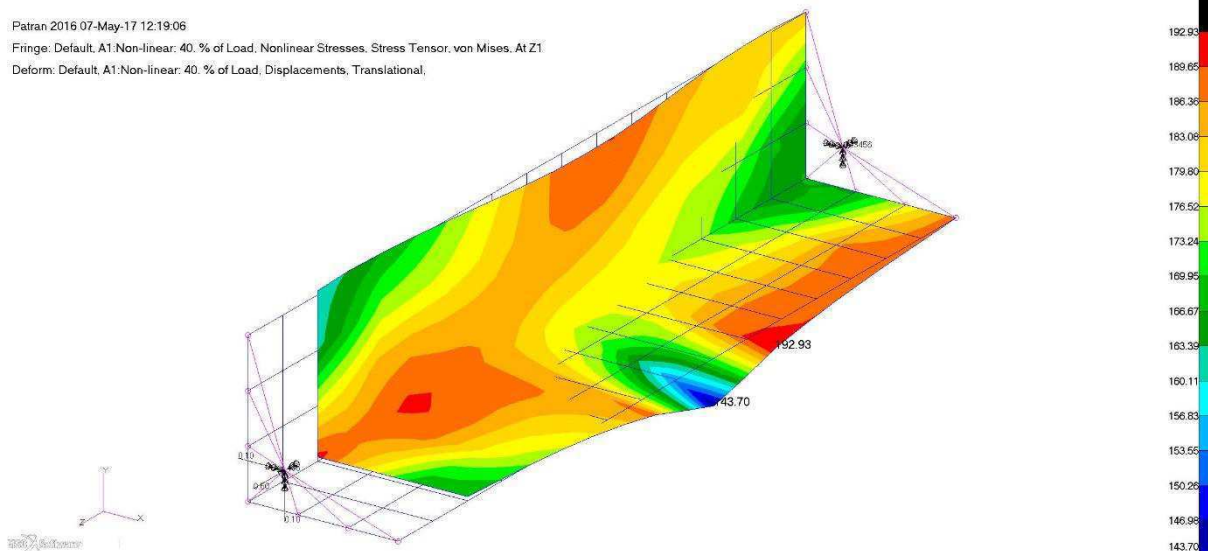
obr. 5-9 Imperfekce A (2%)

Další obrázek znázorňuje napjatost a deformaci při 20 % zatížení, které odpovídá osovému stlačení profilu o 0,1 mm. Maximum redukovaného napětí je rovno 97,42 MPa. Minimální hodnota napjatosti je opět v místě imperfekce, a to 76,44 MPa.



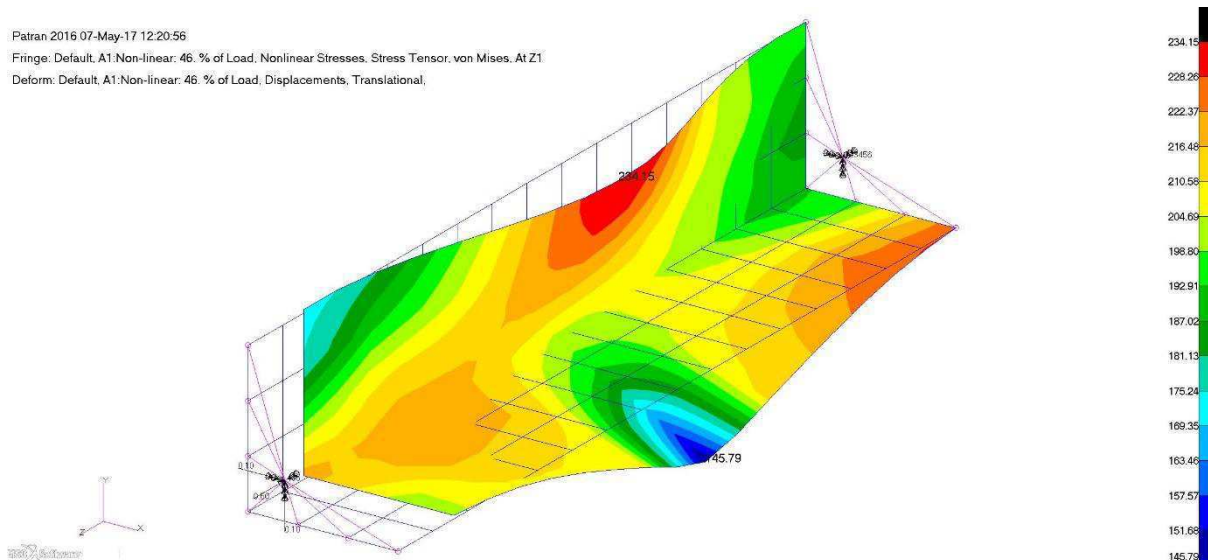
obr. 5-10 Imperfekce A (20%)

Zde je znázorněn stav při 40 % zátěže, který odpovídá stavu blízkému ztrátě stability. Je zde patrný začátek vybočení obou stěn profilu. Z obrázku je vidět, že svislá stěna přenáší maximální napětí v diagonálním směru. Napětí v místě imperfekce je 143 MPa a napravo od ní maximální hodnota redukovaného napětí odpovídající 192 MPa, což je hodnota blízká kritickému napětí.



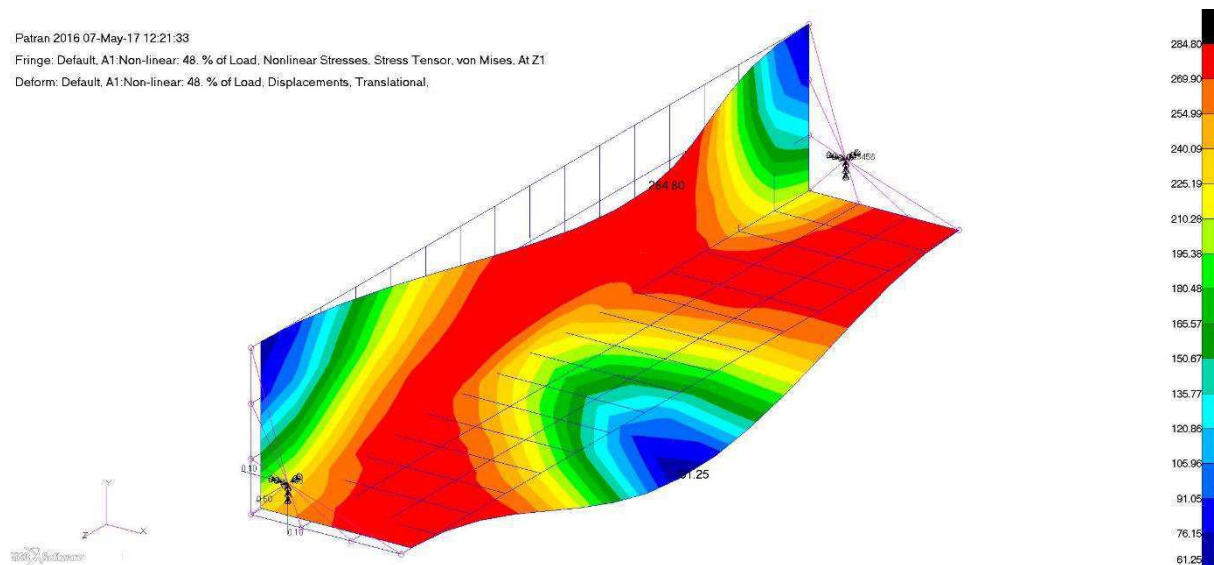
obr. 5-11 Imperfekce A (40%)

Tento obrázek představuje kritický stav těsně před vybočením stěny profilu, kdy je dosaženo největšího možného napětí. Maximum se nachází uprostřed v horní části svislé stěny profilu. Z obrázku je patrná velká deformace v oblasti imperfekce. Daný stav odpovídá zatížení 46%, tedy stlačení profilu 0,23 mm. Velikost osové síly je rovna kritické síly, konkrétně 6022 N.



obr. 5-12 Imperfekce A (46%)

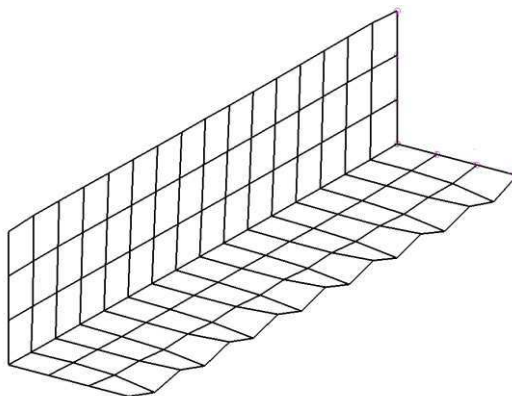
Obrázek obr. 5-13 znázorňuje stav ihned po vybočení. Dle simulace nastala typicky lokální ztráta stability, kdy došlo k vybočení vodorovné stěny s imperfekcí. Nikoliv celé střednice profilu. Ztráta stability se vyznačuje výrazným poklesem síly, jelikož profil ztratí tuhost. V tomto případě poklesla reakční síla ve vetknutí z původních 6022 N na 5496 N.



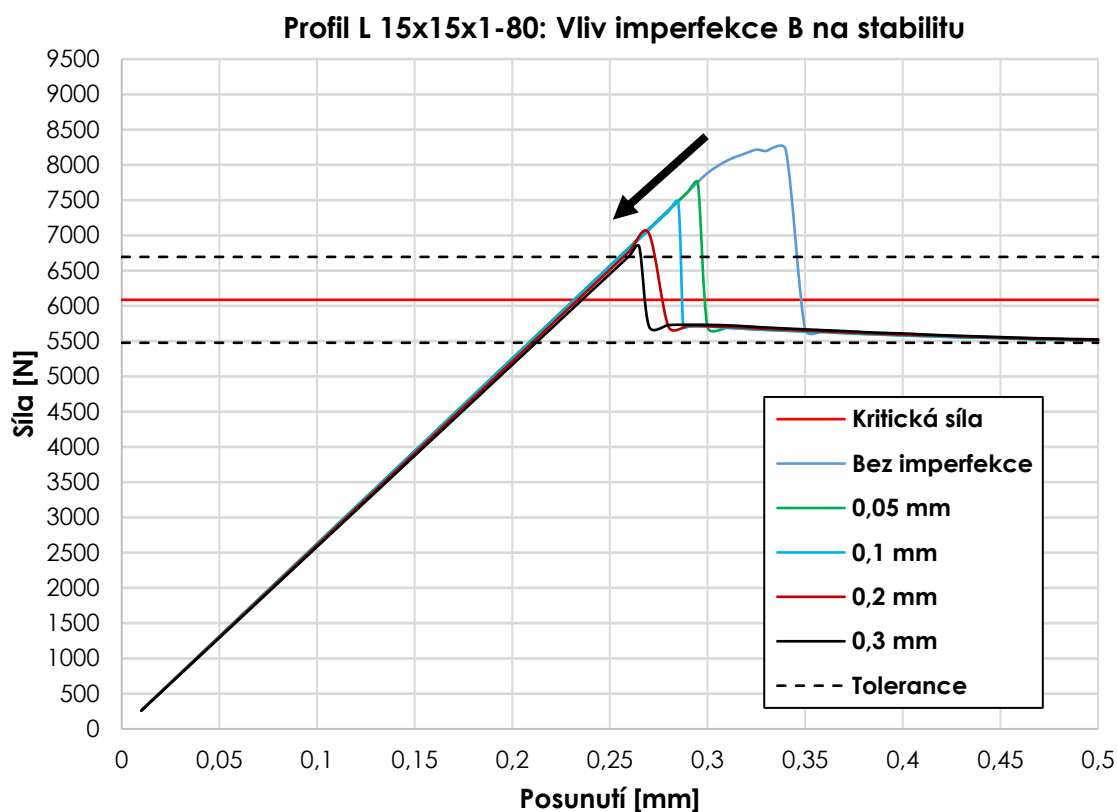
obr. 5-13 Imperfekce A (48%)

5.5.2 Střídavý posun všech uzlových bodů na jedné hraně profilu (B)

U všech krajních uzlů na jedné hraně profilu viz obr. 5-14 jsem postupně nastavoval velikost jejich posunutí z původní pozice a sledoval, jaký vliv to bude mít na výslednou kritickou sílu při ztrátě stability, stejně jako v předcházejícím případě. Posun jsem zvětšoval z hodnoty 0,05 mm až na výchylku 0,3 mm. Výsledky simulace jsou uvedeny v tab. 5-2 a průběhy zobrazeny v graf 5-5.



obr. 5-14 Imperfekce celé hrany



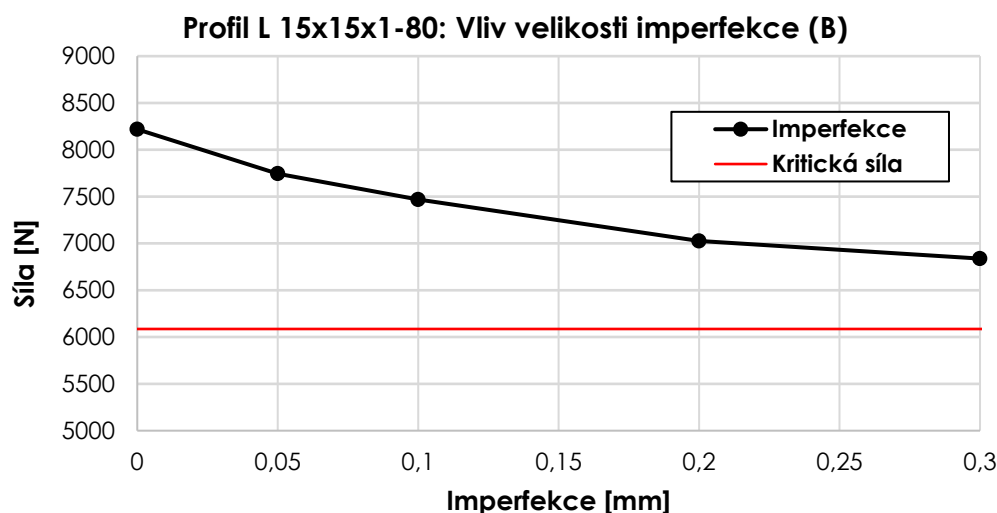
graf 5-5 Vliv imperfekce jedné hrany

Z graf 5-5 je dobře vidět, že modely mají přibližně stejnou tuhost. Modely s imperfekcí 0,2 mm a 0,3 mm se jen nepatrně odklání od ostatních. Jako u předchozího případu je zde patrný trend poklesu kritické síly se vzrůstající velikostí imperfekce. Do tolerančního pásma 10 % se však nevejde žádný z nich. Nejblíže je tomu model s imperfekcí 0,3 mm.

tab. 5-2 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce B

Imperfekce [mm]	Kritická síla [N]	Kritické napětí [Mpa]
0	8219	280
0,05	7745	263
0,1	7469	254
0,2	7026	239
0,3	6838	233

Následující graf 5-6 vyjadřuje trend poklesu kritické síly v závislosti na velikosti imperfekce (posunu uzlů na hraně profilu). Z grafu je patrný stále se zmenšující pokles kritické síly s rostoucí velikostí imperfekce. K dosažení průměrné kritické hodnoty tedy nedojde.



graf 5-6 Trend kritické B

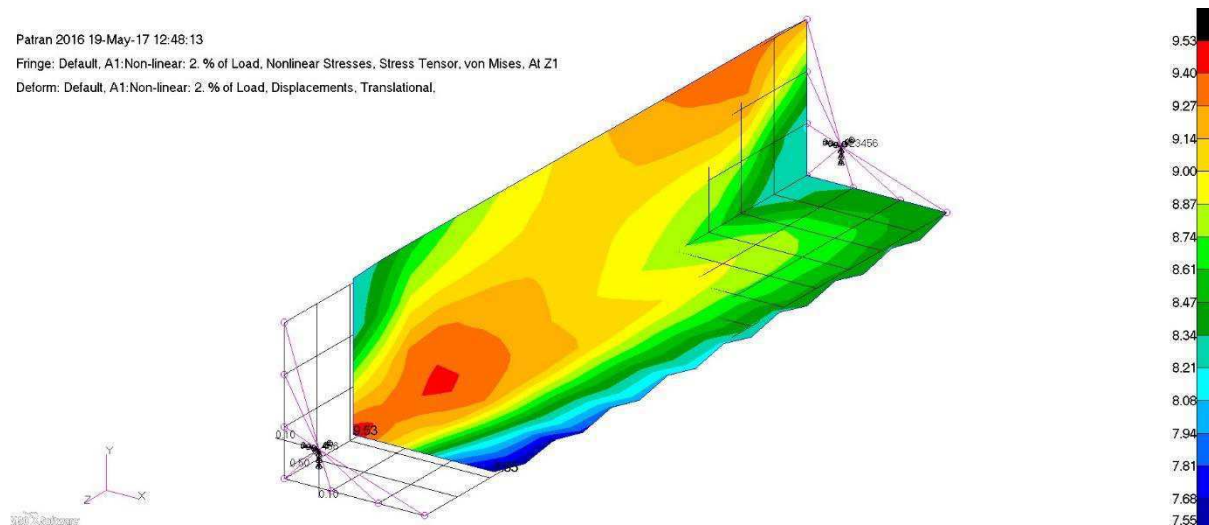
Nejblíže se této hranici blíží model s posunem hraničních uzlů o 0,3 mm. Následující obrázky znázorňují chování profilu s touto imperfekcí při postupném zatěžování.

Začíná se opět od 2 % zatížení. Nejmenší napětí je v krajní oblasti imperfektní hrany a odpovídá 7,55 MPa. Největší napětí je přenášeno svislou stěnou a střední částí profilu.

Patran 2016 19-May-17 12:48:13

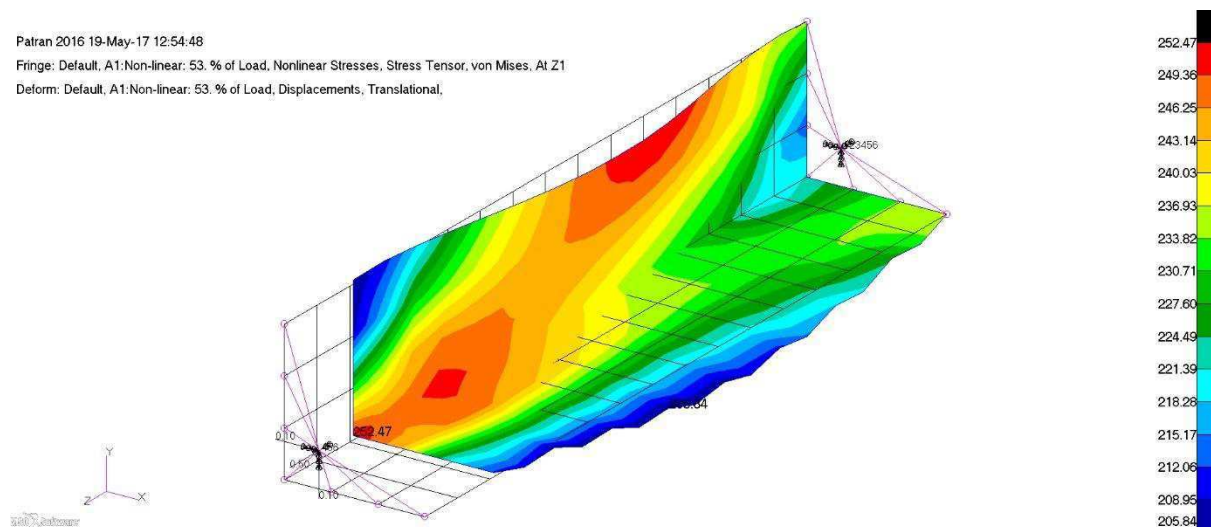
Fringe: Default, A1:Non-linear: 2. % of Load, Nonlinear Stresses, Stress Tensor, von Mises, At Z1

Deform: Default, A1:Non-linear: 2. % of Load, Displacements, Translational,



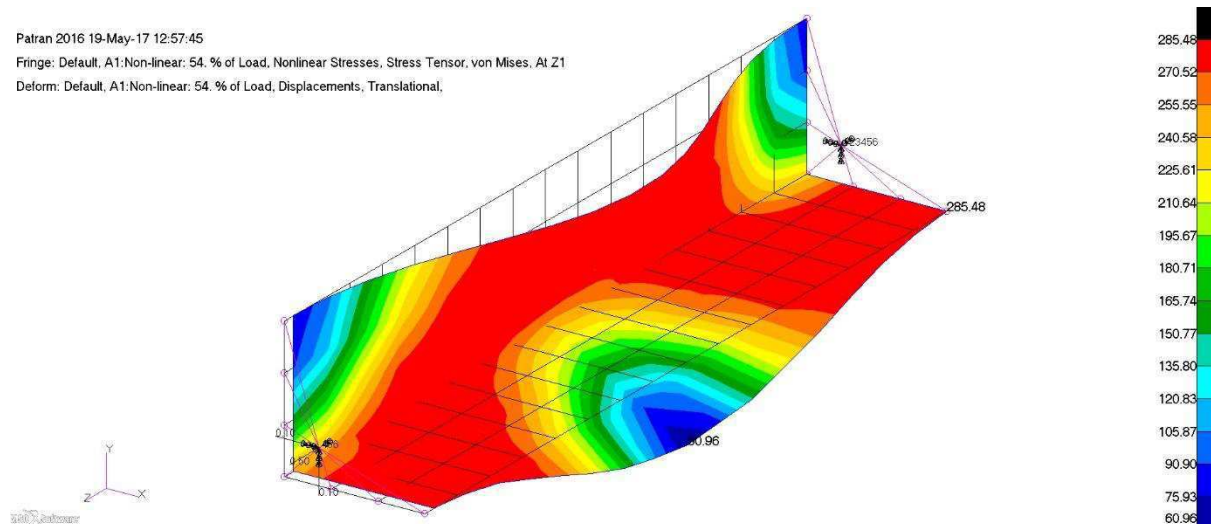
obr. 5-15 Imperfekce B (2%)

Další obrázek je stav již před vybočením stěny profilu, kdy je dosaženo kritického napětí. Největší napětí přenáší svislá stěna profilu v diagonálním směru. Maximální hodnota redukovaného napětí se nachází uprostřed v horní části svislé stěny a v levé oblasti kolem středu profilu, a to přibližně 250 MPa. Na hraně s imperfekcemi je napětí nejnižší a minimum se nachází zhruba v jedné třetině. Tento stav odpovídá zatížení 53 %, tedy stlačení profilu o 0,27 mm. Velikost osové síly je rovna kritické síle, tedy 6838 N.



obr. 5-16 Imperfekce B (53%)

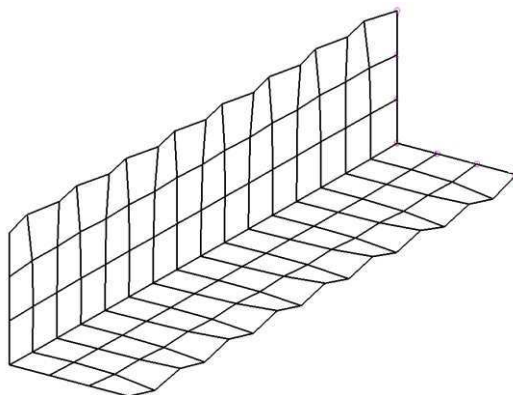
Z posledního obrázku je zřejmá lokální ztráta stability, kdy došlo k vybočení vodorovné stěny profilu s imperfekcemi na její hraně. Osová reakční síla opět výrazně poklesla z původních 6838 N na 5710 N.



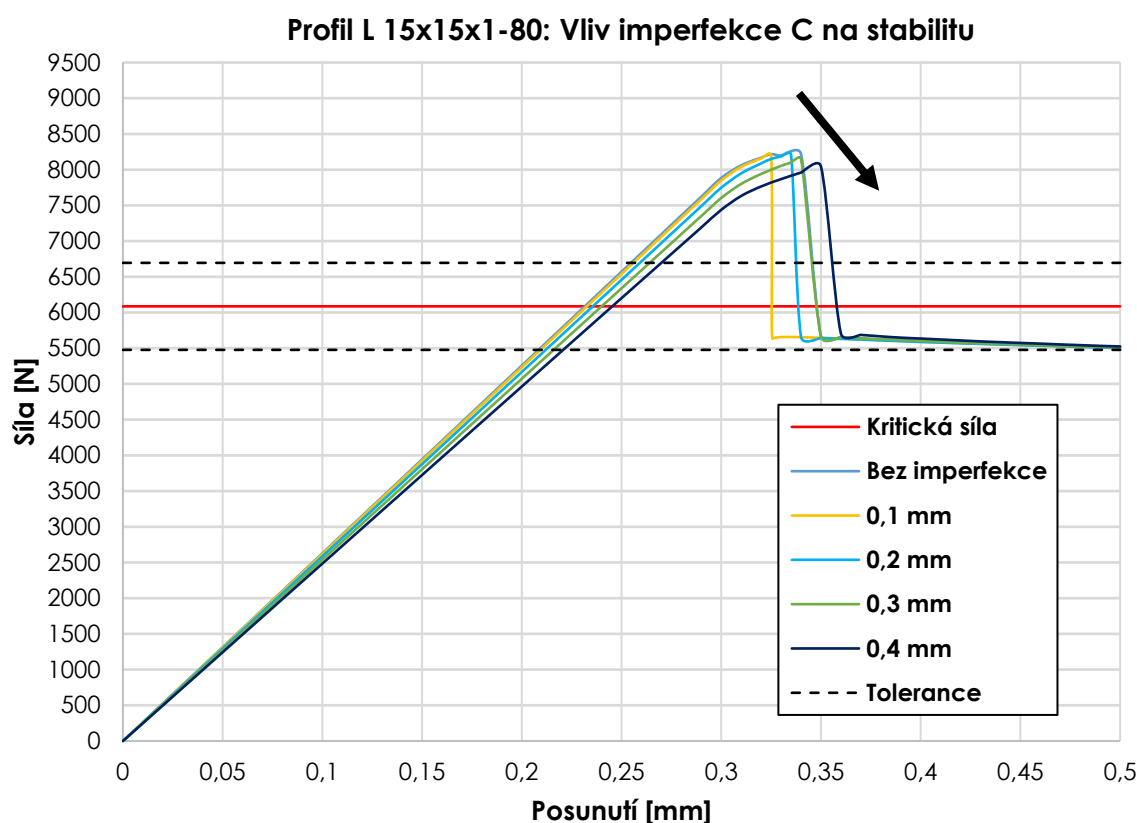
obr. 5-17 Imperfekce B (54%)

5.5.3 Střídavý posun všech uzlových bodů na obou hranách profilu (C)

V tomto případě jsem nastavil střídavý posun krajních uzlů na obou hranách profilu viz obr. 5-18. Imperfekci jsem zvětšoval z hodnoty 0,1 mm až na hodnotu 0,4 mm. Výsledky simulace jsou uvedeny v tab. 5-3 a průběhy zobrazeny v graf 5-7.



obr. 5-18 Imperfekce obou hrany



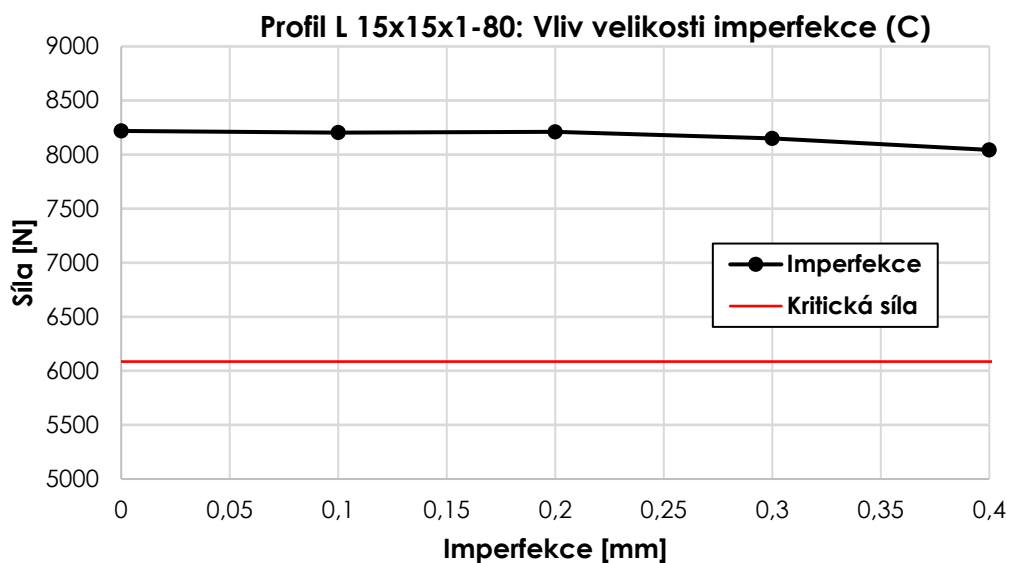
graf 5-7 Vliv imperfekce obou hrany

Modely s tímto typem imperfekce jsou se vzrůstající velikostí výchylky poddajnější. Maximální hodnoty síly jsou u většiny případů blízké, a to dokonce i u modelu bez imperfekce. Tím pádem je velikost kritické síly značně vysoká, a tak se do tolerančního pásma 10 % nevejde žádný z nich.

tab. 5-3 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce C

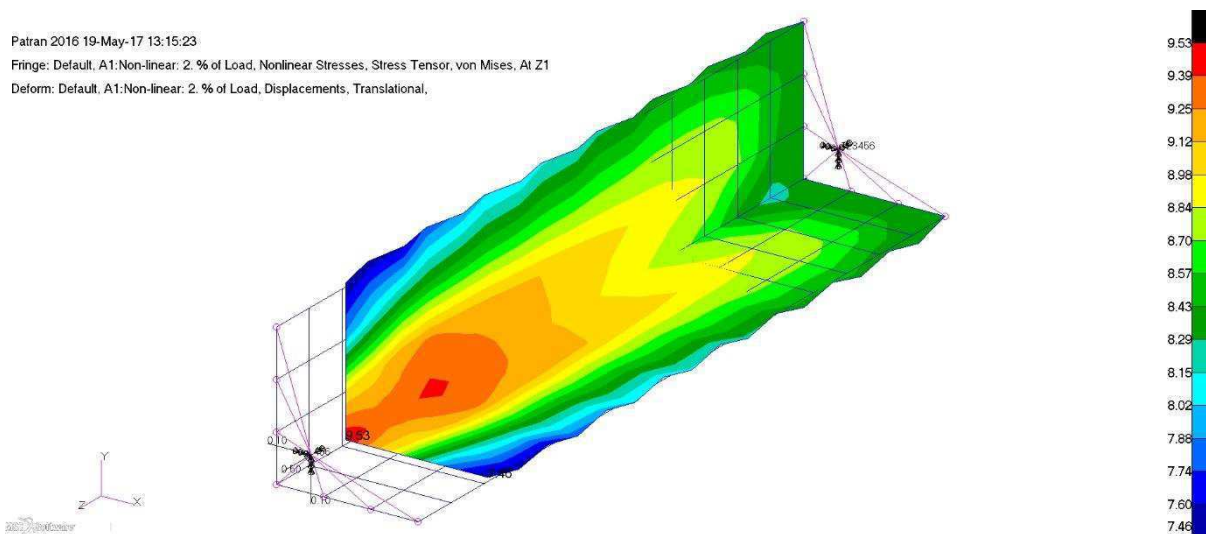
Imperfekce [mm]	Kritická síla [N]	Kritické napětí [Mpa]
0	8219	280
0,1	8203	279
0,2	8210	279
0,3	8149	277
0,4	8043	274

Z graf 5-8 je vidět, že velikost kritické síly se se vzrůstající imperfekcí do hodnoty 0,2 mm v podstatě nemění. Mírný pokles nastane až od této hodnoty. Minimum je dosaženo při velikosti imperfekce 0,4 mm, přesto je tato síla velmi vysoká. Proto ani v tomto případě nedojde k dosažení průměrné experimentální hodnoty kritické síly.



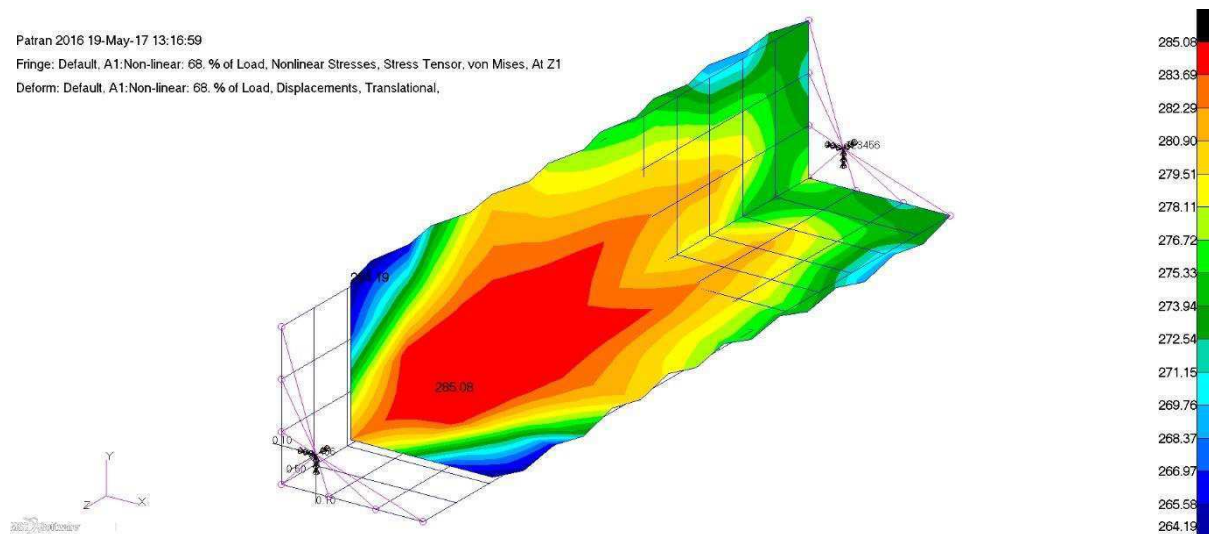
graf 5-8 Trend kritické síly C

Následující obr. 5-19 znázorňuje počáteční stav zatěžování profilu s imperfekcí o velikosti 0,3 mm. Napjatost je rozložena symetricky na obou stěnách profilu navzdory excentricitě zatížení.



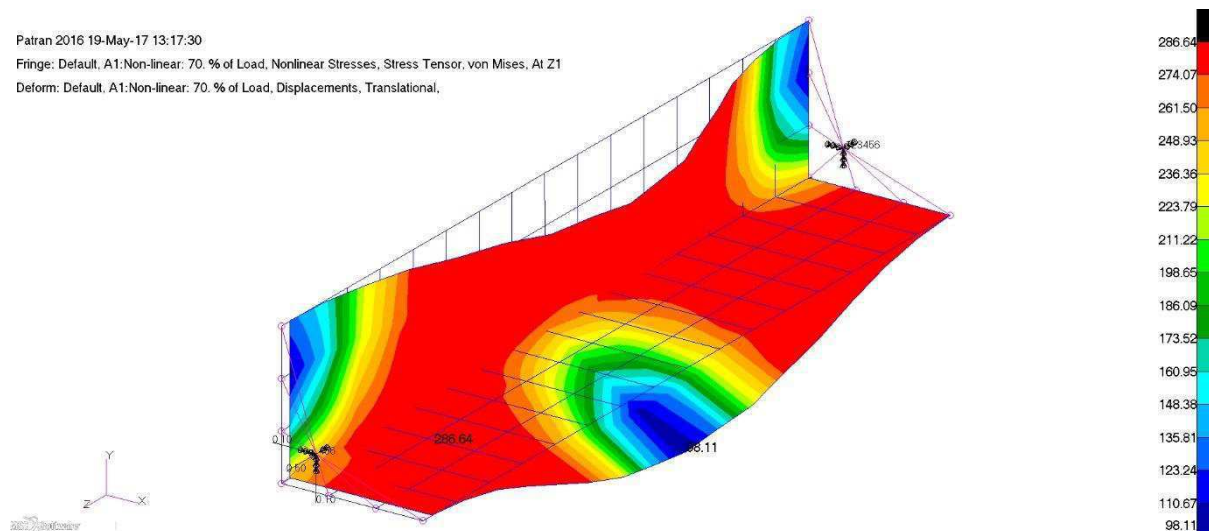
obr. 5-19 Imperfekce C (2%)

Tento obr. 5-20 odpovídá zatížení 68 %. Jedná se o stav těsně před vybočením stěny profilu, kdy je dosaženo kritického napětí. Maximální napětí je rozloženo symetricky kolem střední části, kde má profil nejvyšší tuhost. Z důvodu symetrie imperfekcí není jasné, která stěna se poruší jako první. Velikost kritické síly je rovna 8149 N, což je velmi vysoká hodnota.



obr. 5-20 Imperfekce C (68%)

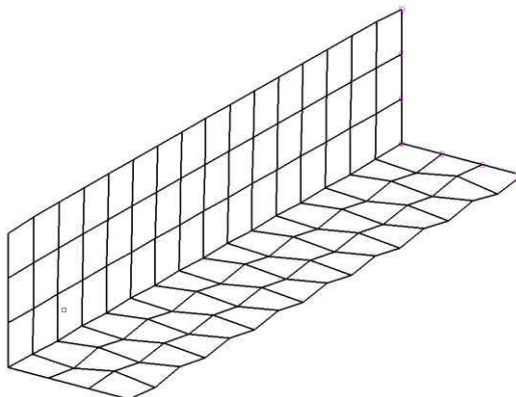
Z posledního obrázku je zřejmé, že nastala opět lokální ztráta stability. Profil však dokázal přenést poměrně vysoké zatížení a porušil se až při 70 %. To odpovídá stlačení 0,35 mm.



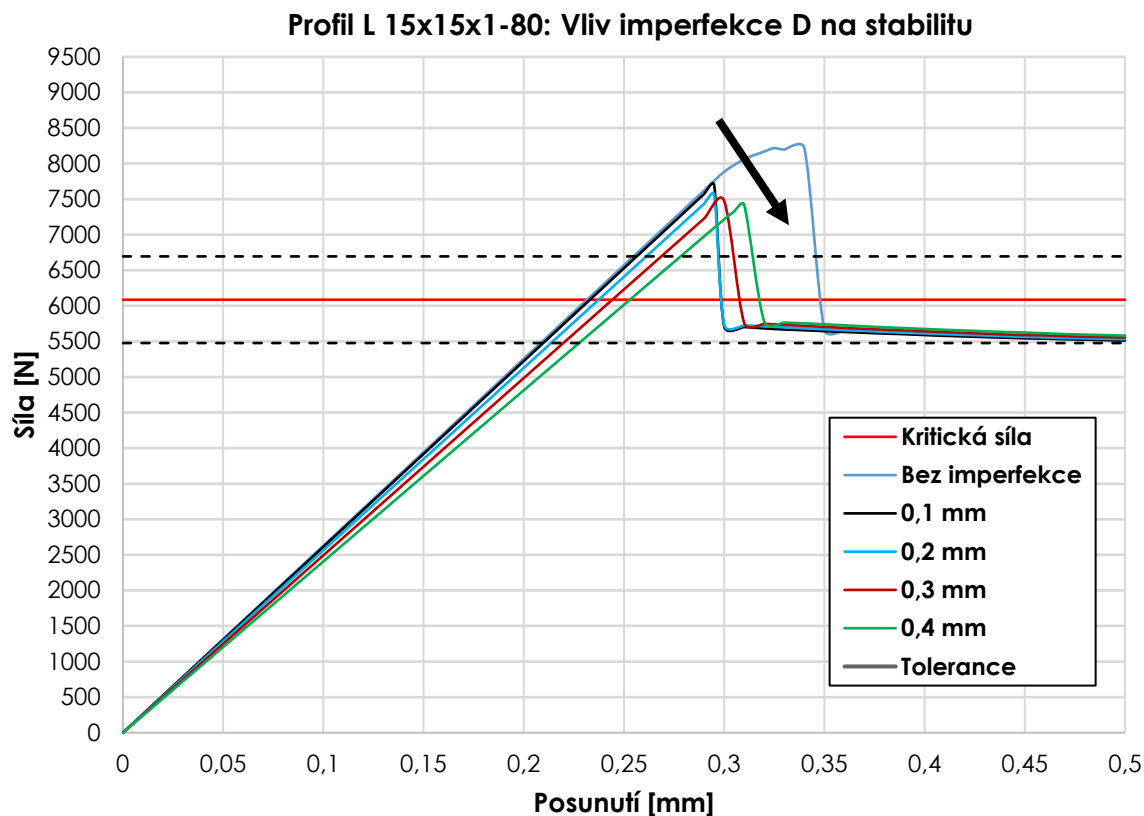
obr. 5-21 Imperfekce C (70%)

5.5.4 Střídavý posun všech uzlových bodů na jedné stěně profilu (D)

U všech uzlů na vodorovné stěně profilu viz obr. 5-22 jsem nastavil střídavý posun o hodnoty 0,1 mm až 0,4 mm. Výsledky simulace jsou uvedeny v tab. 5-4 a průběhy zobrazeny v graf 5-9.



obr. 5-22 Imperfekce stěny



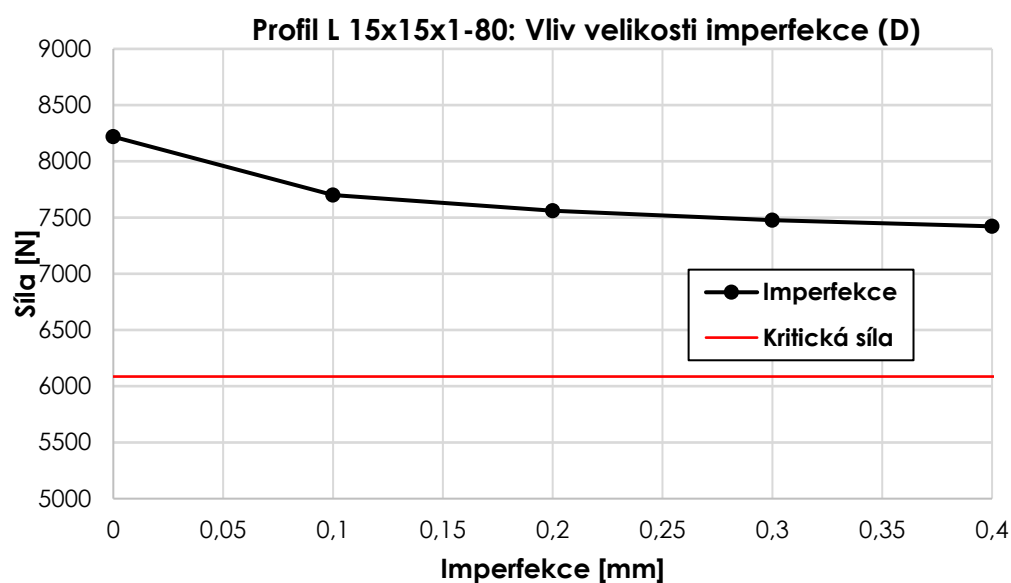
graf 5-9 Vliv imperfekce stěny

Průběhy křivek jsou si podobné s předchozím případem. Modely postupně ztrácí tuhost s rostoucí velikostí imperfekce, ale kritická síla klesá pozvolna. Z toho důvodu se ani jeden model nedostane do 10 % rozsahu.

tab. 5-4 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce D

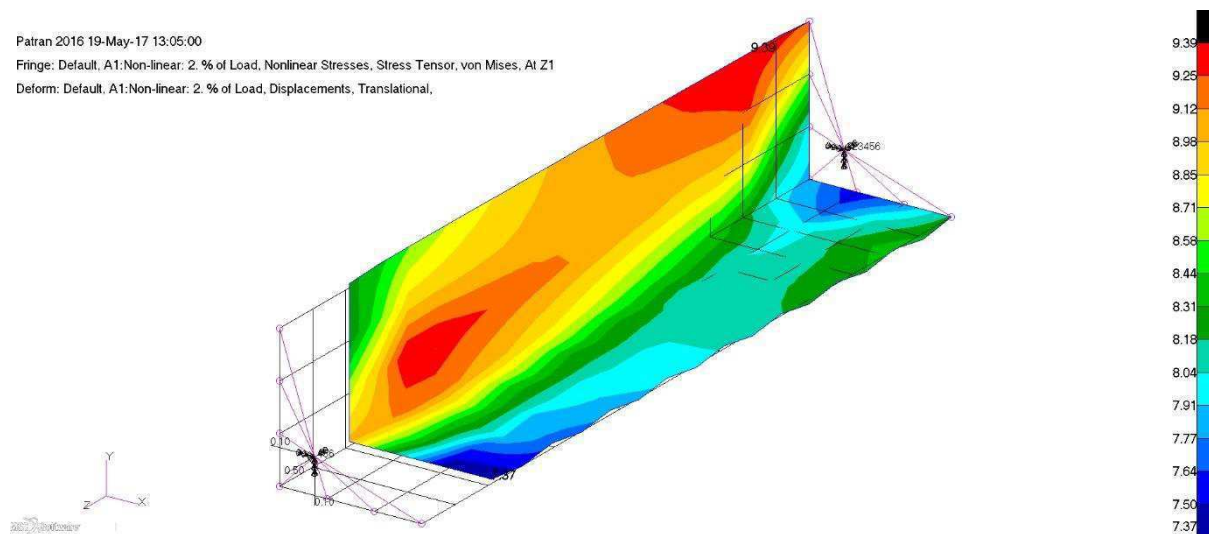
Imperfekce [mm]	Kritická síla [N]	Kritické napětí [Mpa]
0	8219	280
0,1	7700	262
0,2	7560	257
0,3	7476	254
0,4	7422	252

Z následujícího grafu lze usoudit, že velikost imperfekce má jen malý vliv na velikost kritické síly. Trend poklesu je velmi pozvolný a průměrné kritické síly se nedosáhne ani s použitím větší imperfekce.



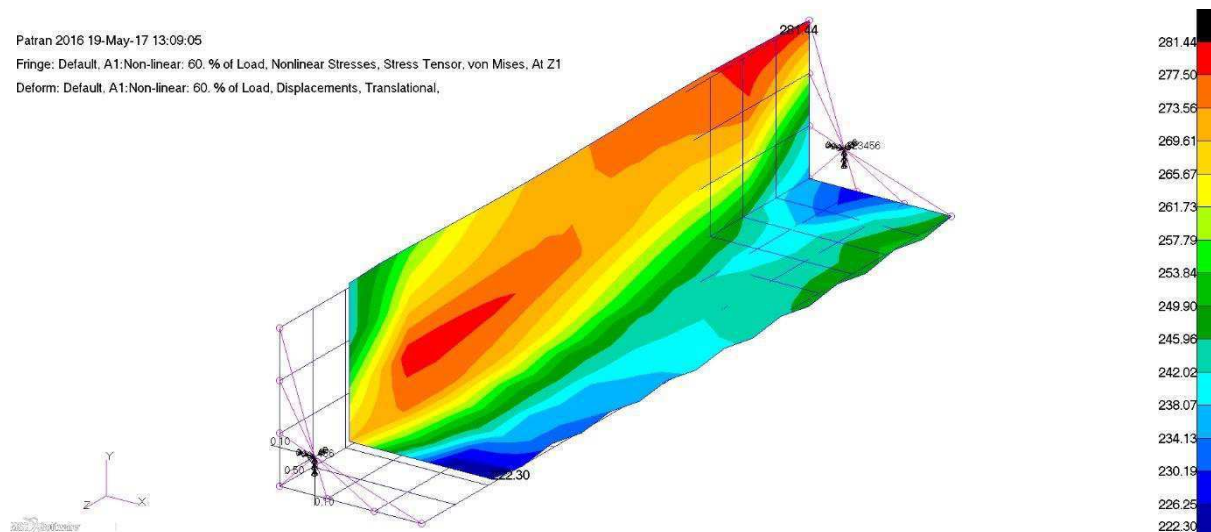
graf 5-10 Trend kritické síly D

Na obr. 5-23 je počáteční stav zatěžování modelu s imperfekcí 0,3 mm. Napětí je rozloženo po profilu nerovnoměrně a z velké části přenášeno svislou stěnou.



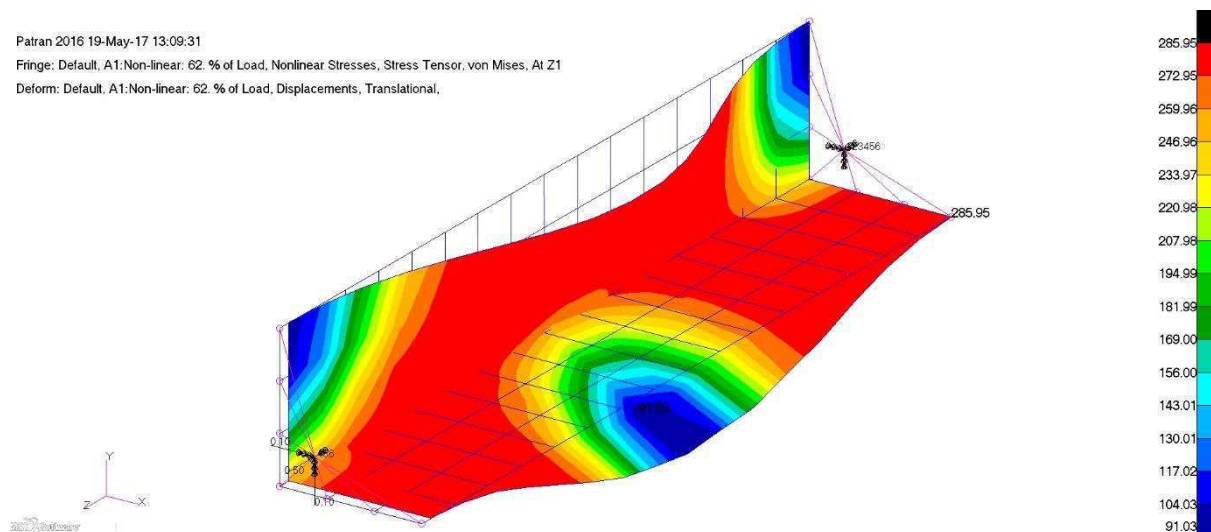
obr. 5-23 Imperfekce D (2%)

obr. 5-24 znázorňuje stav již před vybočením stěny profilu, kdy je dosaženo kritického napětí. Maximální napětí přenáší svislá stěna v celé své délce. Na vodorovné stěně s imperfekcemi je napětí podle očekávání nejnižší. Tento stav odpovídá zatížení 60 %, což je stlačení profilu o 0,3 mm. Velikost kritické síle je rovna 7476 N.



obr. 5-24 Imperfekce D (60%)

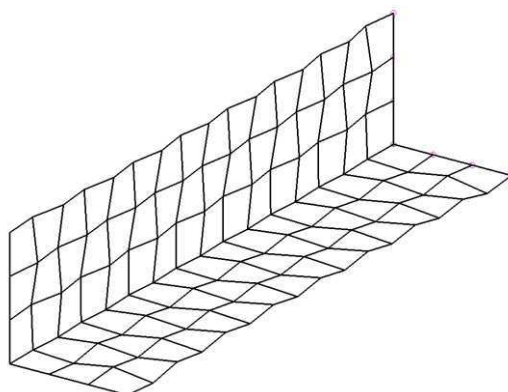
Zde je zobrazen stav po lokální ztrátě stability. Došlo tedy k vybočení imperfektní stěny profilu. V tomto případě poklesla síla z kritické hodnoty na 5759 N.



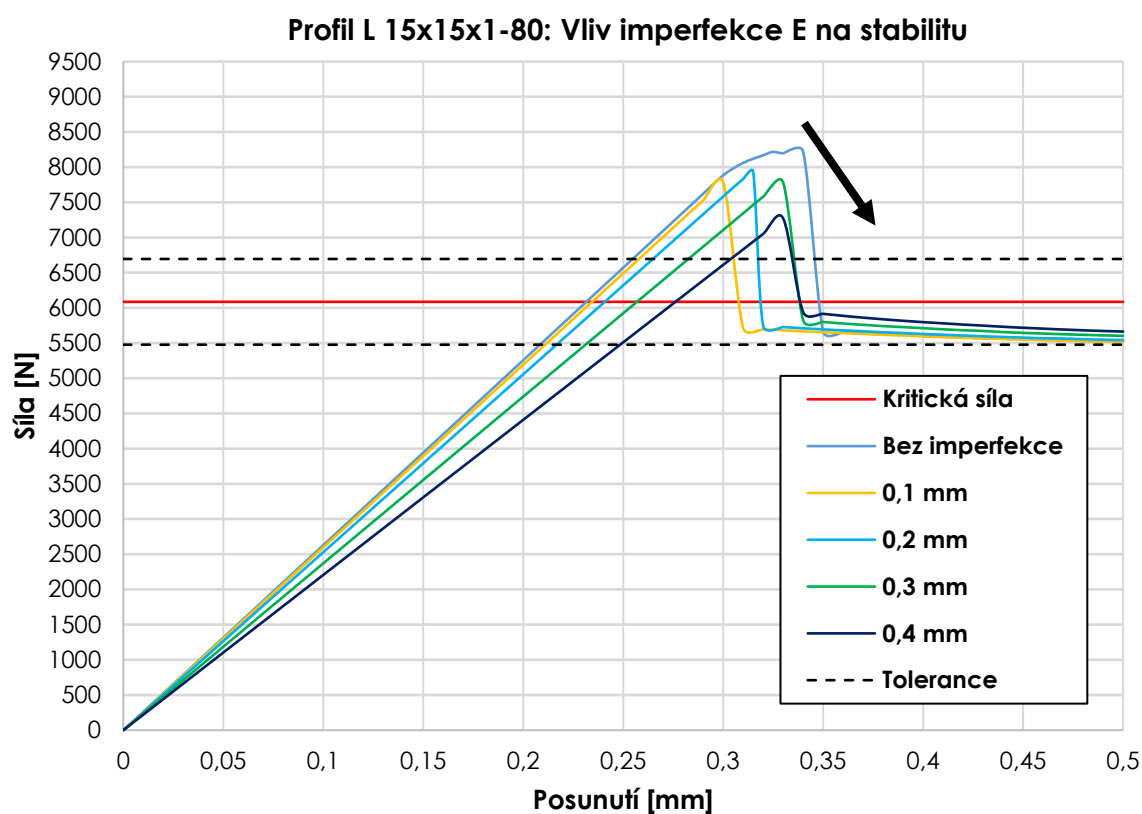
obr. 5-25 Imperfekce D (62%)

5.5.5 Střídavý posun všech uzlových bodů na obou stěnách profilu (E)

Jako poslední možnost jsem zvolil střídavý posun uzlových bodů na obou stěnách profilu, a to o hodnoty 0,1 mm až 0,4 mm. Výsledky simulace jsou uvedeny v tab. 5-5 a průběhy zobrazeny v graf 5-11.



obr. 5-26 Imperfekce obou stěn



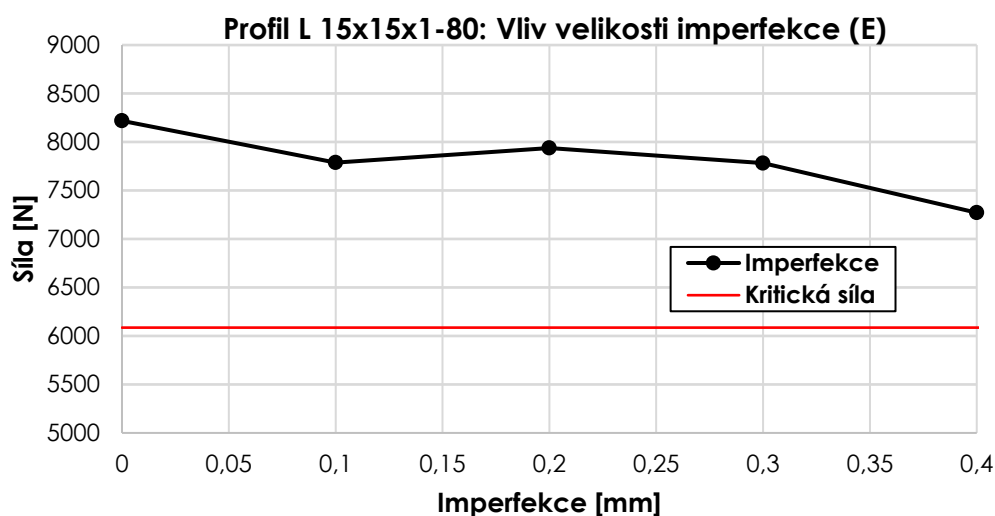
graf 5-11 Vliv imperfekce obou stěn

V tomto případě je vidět největší pokles tuhosti s rostoucí velikostí imperfekce. Velikost kritické síly je u modelu s imperfekcí 0,1 mm nižší než u modelu 0,2 mm, což je překvapivé. Při opakování výpočtu však bylo dosaženo stejných výsledků. S dalším zvyšováním imperfekcí klesá kritická síla jako obvykle.

tab. 5-5 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce E

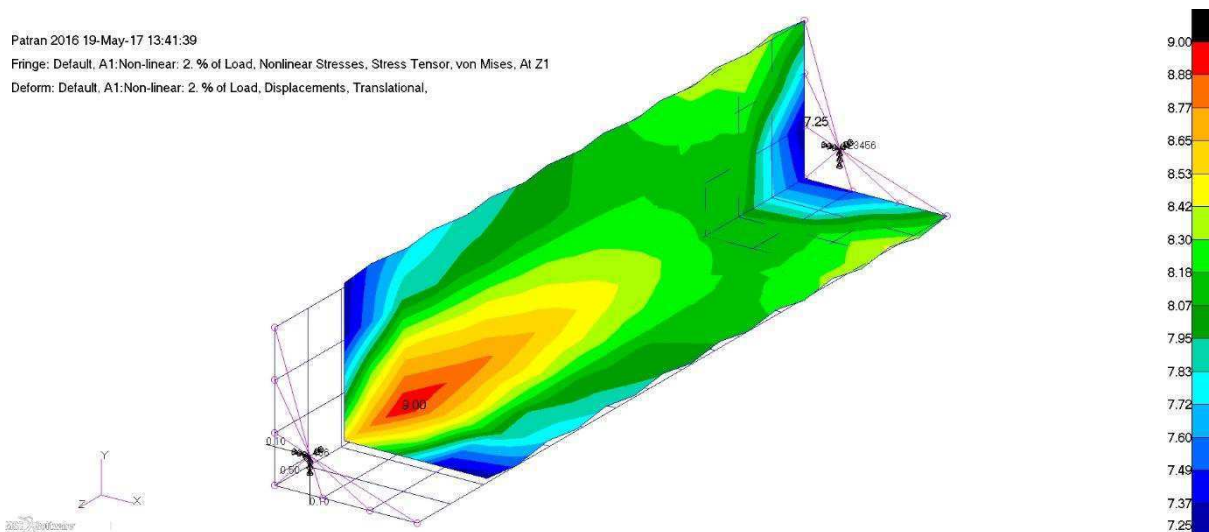
Imperfekce [mm]	Kritická síla [N]	Kritické napětí [Mpa]
0	8219	280
0,1	7788	265
0,2	7938	270
0,3	7782	265
0,4	7271	247

Z grafu graf 5-12 je lépe vidět neobvyklý nárůst kritické síly v rozmezí imperfekcí 0,1-0,2 mm. V další části kritická síla klesá, a to dokonce se stále se zvětšující strmostí. Nejvíce se přiblížil průměrné hodnotě model s imperfekcí 0,4 mm, což už je ale poměrně velký zásah do geometrie profilu. Proto není vhodné imperfekce nadále zvětšovat a snažit se přiblížit pásmu tolerance.



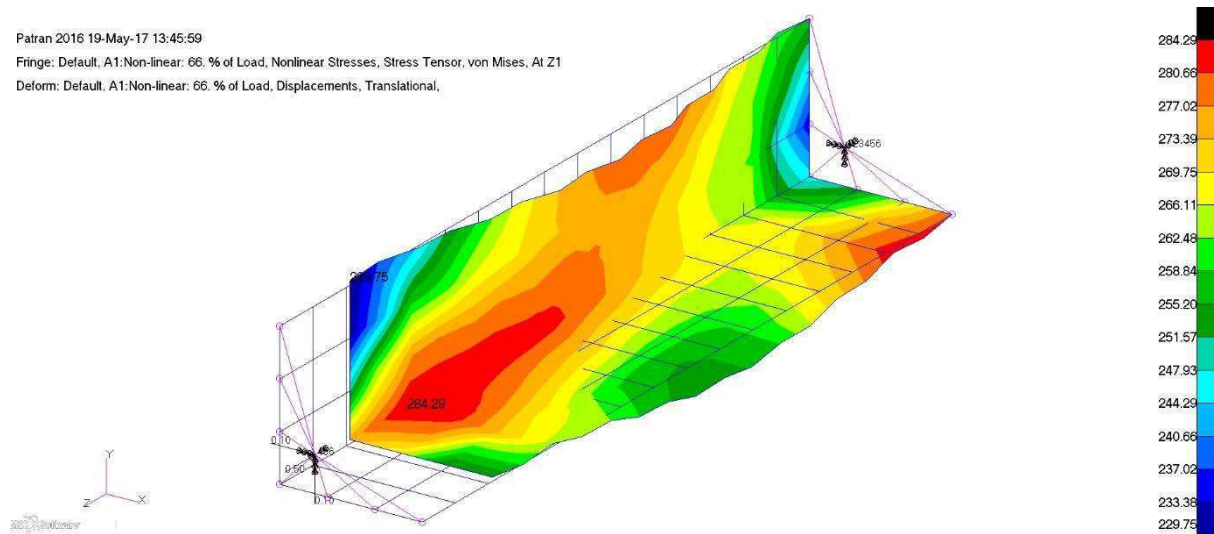
graf 5-12 Trend kritické síly E

Průběh simulace je proveden pro model s imperfekcí 0,3 mm. Počáteční symetrický stav napjatosti viz obr. 5-27 je podobný jako v případě imperfekce dvou hran profilu. Největší napětí je přenášeno střední částí, kde se vytvoří lokální zesílení vlivem styku vodorovné a svislé plochy profilu.



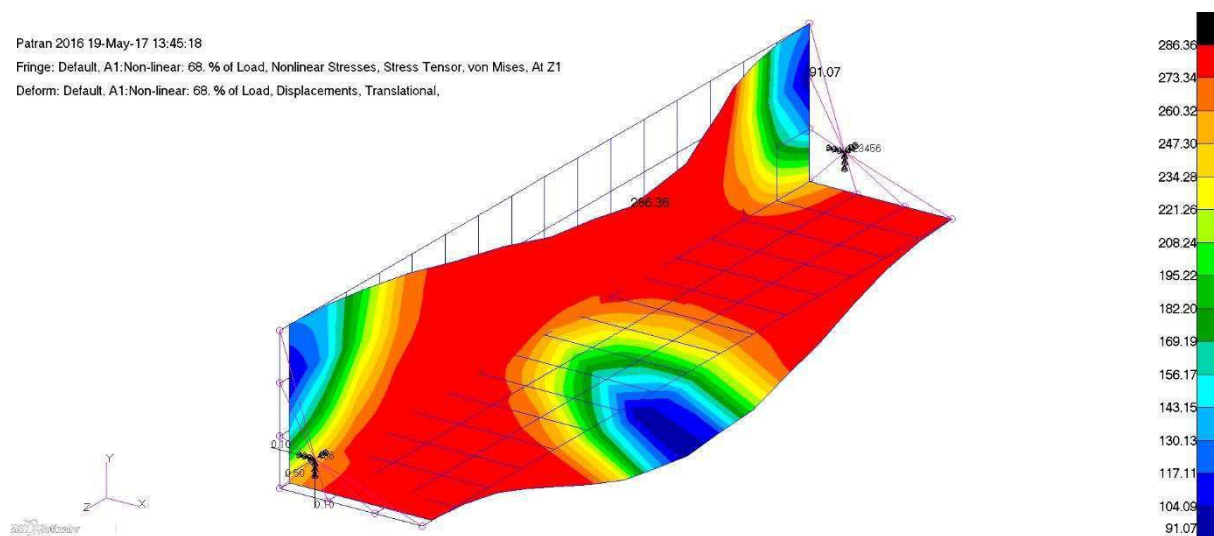
obr. 5-27 Imperfekce E (2%)

Tento obrázek znázorňuje kritický stav před vybočením. Maximální redukované napětí je přenášeno střední částí profilu a diagonálně se rozšiřuje k horní hraně svislé plochy. Pro daný stav je velikost kritické síly 7782 N.



obr. 5-28 Imperfekce E (66%)

Opět nastala lokální ztráta stability vybočením stěny profilu. Osová síla poklesla na 5823 N.



obr. 5-29 Imperfekce E (68%)

5.6 Vyhodnocení numerického řešení

Ze všech provedených simulací lze usoudit, že volba geometrické imperfekce má asi největší vliv na ztrátu stability daného profilu. To usuzuji z porovnání jednotlivých variant imperfekcí se kterými jsem počítal. Velikosti kritických sil se lišily v závislosti jak na volbě umístění imperfekce, tak na její velikosti, což jsem předem předpokládal.

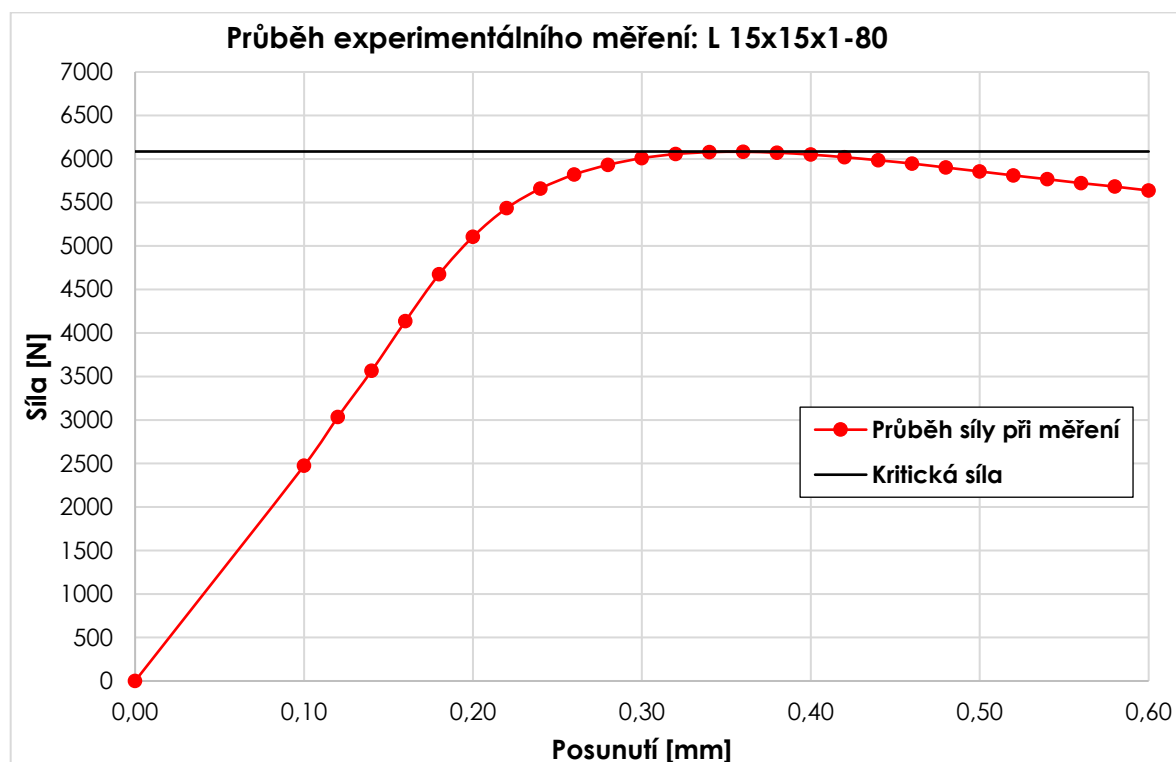
Dle obrázků simulací proběhla ve všech případech lokální ztráta stability, tedy vybočení některé stěny profilu. Je to dáno tím, že stabilnější střední část průřezu dokáže přenést vyšší zatížení než jednotlivé stěny, které se tak poruší dříve.

V následující kapitole 6 provádím porovnání variant modelů s imperfkcemi na základě průběhu experimentálního měření i výsledků analytického řešení.

6 SROVNÁNÍ TEORETICKÝCH HODNOT S EXPERIMENTEM

V této kapitole je provedeno srovnání teoretických hodnot analytického a numerického řešení s výsledky experimentálního měření. Porovnání s experimentální hodnotou probíhalo již v kapitole 5.5. Tam jsem použil maximální sílu zjištěnou experimentem jako pomocnou hodnotu pro orientaci, kde se asi s výpočtem nacházím. Tím pádem již vím, které případy imperfekcí jsou pro dané řešení nejvhodnější. Tyto modely nyní porovnám s výsledky analytického řešení a přesným průběhem síly při experimentálním měření. Mohu tak kromě maximální hodnoty porovnat i celý průběh deformace před i po ztrátě stability.

Následující graf 6-1 znázorňuje průměrný průběh z osmi měření výztužného profilu na zkušebně leteckého ústavu VUT. Tato data mi byla poskytnuta vedoucím bakalářské práce. Průběh experimentálně naměřené síly v závislosti na stlačení zobrazuje graf 6-1.



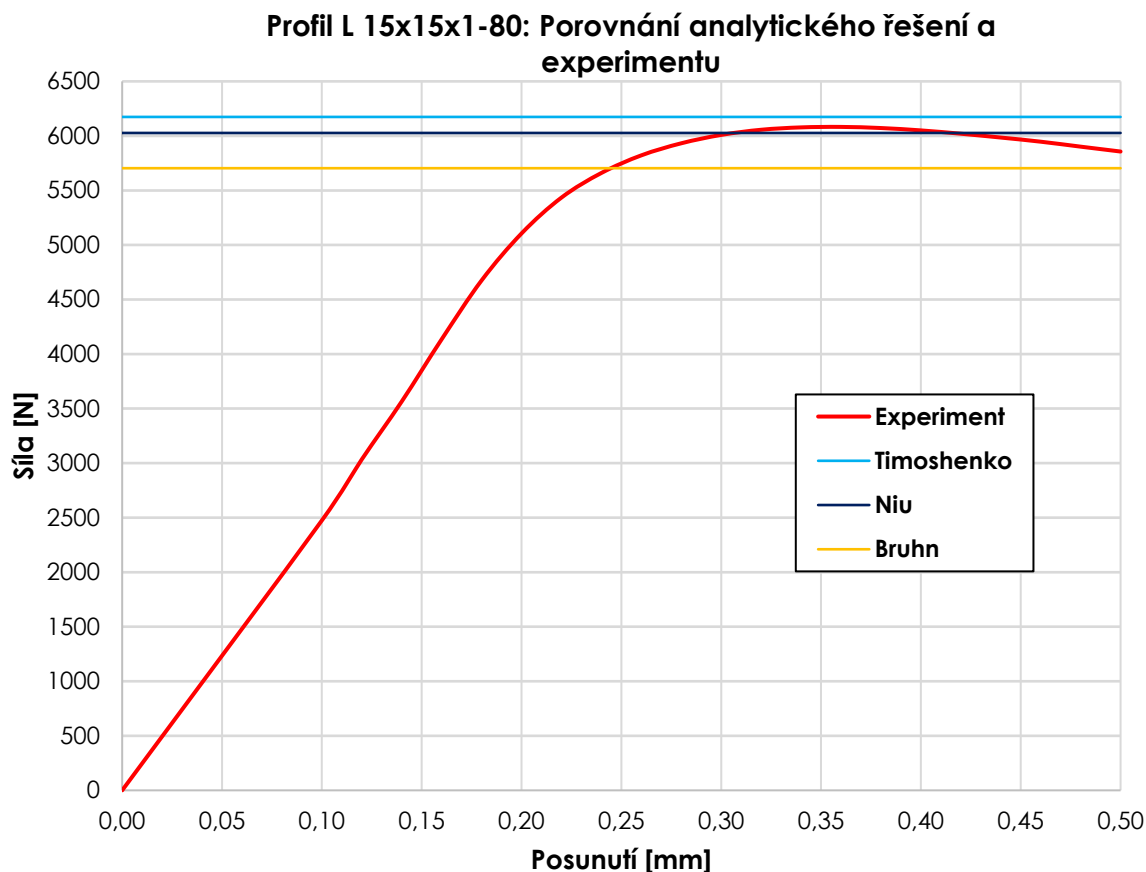
graf 6-1 Průběh experimentálního měření

6.1 Porovnání analytických výpočtů s hodnotami experimentu

V kapitole 4 jsem provedl několik analytických výpočtů, jejichž výsledky porovnávám v následujícím graf 6-2 s průběhem experimentu. Více než průběh mě v této části zajímá maximální naměřená hodnota viz tab. 6-1, abych mohl určit, která analytická metoda se nevíce blíží experimentu. Porovnání vypočtených hodnot včetně procentuální odchylky je uvedeno v tab. 6-2.

tab. 6-1 Maximální hodnoty experimentu

Experiment	
Kritická síla [N]	Kritické napětí [Mpa]
6086	207



graf 6-2 Porovnání analytických výsledků s experimentem

Z grafu je patrné, že experimentální kritické hodnotě se nejvíce blíží metoda Niu, která vyšla nižší pouze o 1 %. Je to dáno tím, že se při výpočtu vycházelo z diagramu pro materiál 2024-T3, čili pro ten samý, z kterého byly vyrobeny experimentální vzorky. Výsledná hodnota dle Timoshenka vychází také poměrně blízko, a to vyšší o 1,4 %.

Metoda podle literatury Bruhn vyšla společně s Johnsonovou metodou nejnižší. U prvně jmenované je to dáno tím, že jsem při výpočtu kritické síly vycházel z diagramu pro ohýbaný profil, který nemá takovou tuhost jako daný lisovaný profil. V případě Johnsonovy metody bylo kritické napětí počítáno na základě dosazení kritického napětí z metody Niu viz 4.4.1.

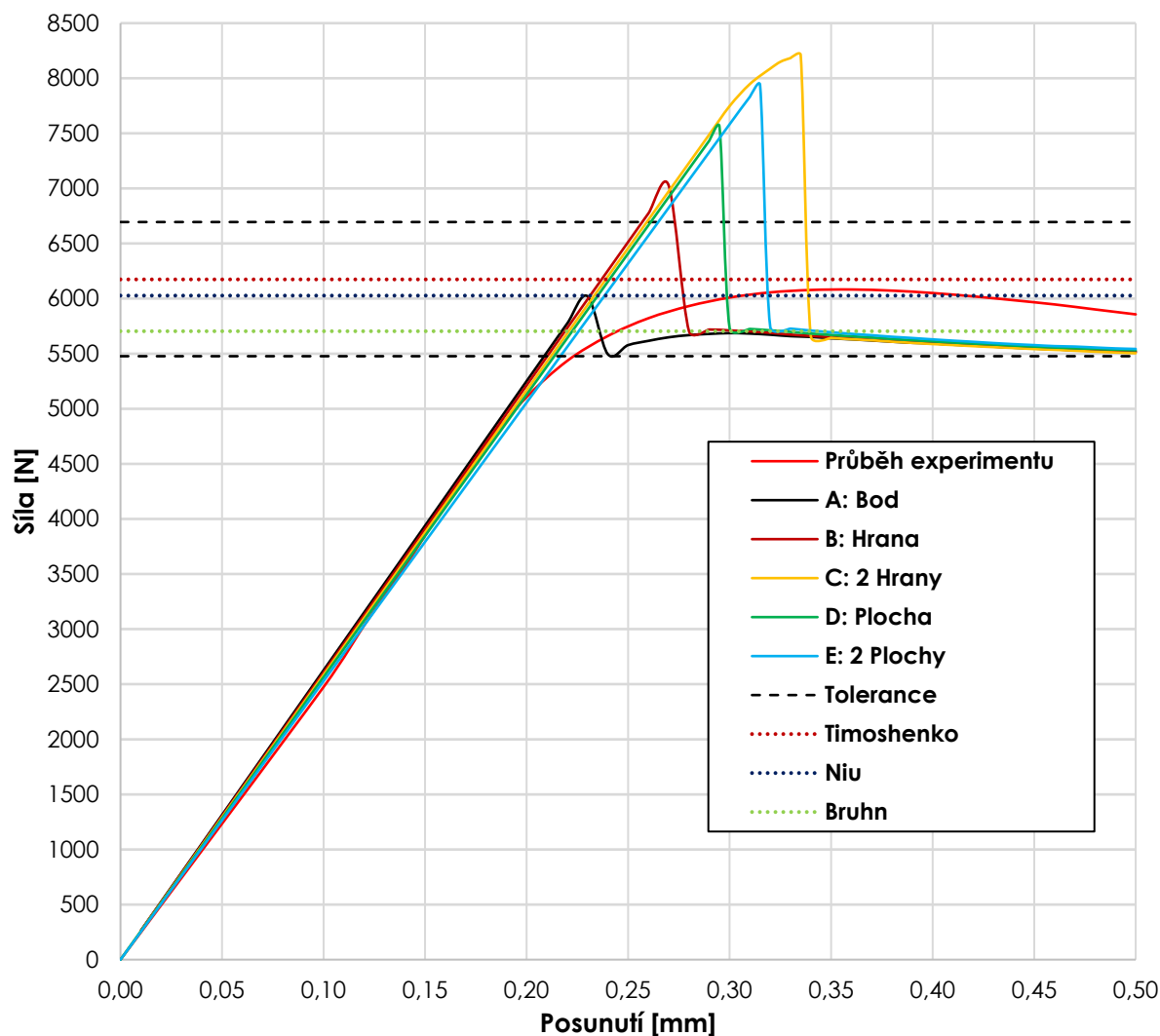
tab. 6-2 Procentuální odchylka analytických metod od experimentu

Metoda	Kritická síla [N]	Kritické napětí [MPa]	Odchylka
Timoshenko	6174	210	1,4%
Niu	6027	205	-1,0%
Bruhn	5704	194	-6,3%
Johnson	5704	194	-6,3%
experiment	6086	207	

6.3 Celkové porovnání modelů s imperfekcemi

V následujícím graf 6-3 porovnávám jednotlivé varianty umístění imperfekcí s průběhem experimentu a výsledky analytického řešení. Vybral jsem modely s velikostí imperfekce 0,2 mm, abych si mohl porovnat, jak se mezi sebou liší. Nutno říci, že všechny simulace byly prováděny na stejném modelu a za stejných podmínek.

Profil L 15x15x1-80: Celkové porovnání modelů s experimentem



graf 6-3 Výběr nejvhodnějšího modelu

Z grafu je vidět, že modely s imperfekcemi prostředního bodu a jedné hrany rostou do hodnoty přibližně 4000 N se stejnou směrnici, jako křivka experimentu. Od této hodnoty se experimentální křivka postupně odklání. U modelů s imperfekcemi však narůstá síla stejně strmě až do kritické hodnoty. U MKP jde o to, aby se konstrukce porušila při stejné síle. Nemusí tedy přesně odpovídat tvaru křivky při experimentu.

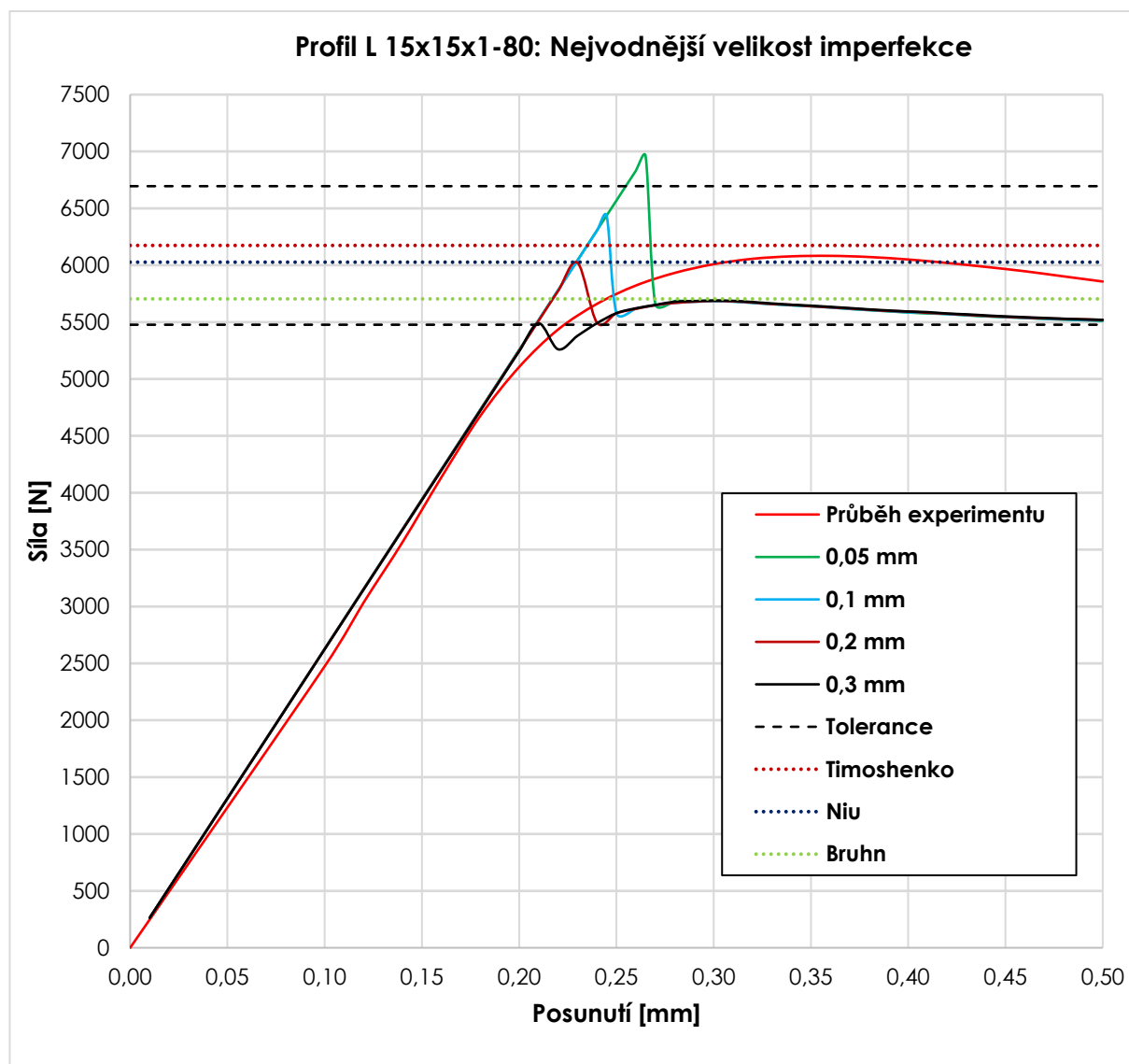
Pokud porovnám maximální hodnoty, je zřejmé, že nejvíce se experimentu blíží ten s imperfekcí jednoho bodu. U něj dojde k vybočení při skoro stejné síle, jako v případě experimentu. Rozdíl je však ve stlačení profilu. U modelu je to zhruba při 0,23 mm, u experimentu při 0,35 mm.

Z grafu je rovněž patrné, že ve většině případů docházelo k velkému nadhodnocení simulace. Nejblíží výsledky má model s imperfekcí prostředního bodu profilu (A), a je tak použitelný pro další analýzu. Model s imperfekcí jedné hrany (B) se blíží tolerančnímu pásmu 10 %, síla je však stále poměrně vysoká. Zvýšením tolerančního pásma na 15 % by mohl být i tento model použit. Takto velká tolerance se však volí při řešení větších celků, a ne jednoho profilu. Z toho důvodu případy imperfekcí (B, C, D, E) nedoporučuji, a to z důvodu nadhodnocení výsledků i pracnému zadávání imperfekcí. Je jasné, že to nemá význam.

Jako optimální řešení volím tedy model s bodovou imperfekcí na lemu profilu, který v následně porovnám podrobněji s průběhem experimentálního měření i výsledky analytického řešení.

6.4 Volba vhodného model

Na základě předchozího vyhodnocení jsem se rozhodl pro výběr modelu s imperfekcí prostředního bodu na hraně profilu. Tím jsem tedy vybral nejvhodnější typ imperfekce a nyní je nutné určit, jaká velikost imperfekce bude optimální.



graf 6-4 Výběr velikosti imperfekce

Pro dané nastavení odpovídá experimentu nejvíce model s posunutím prostředního uzlu o 0,2 mm. Velikost kritické síly vyšla 6022 N při stlačení profilu o 0,23 mm. Tato kritická síla se liší od maximální hodnoty dané experimentem o 1,1 %. Je zde patrná i shoda s analytickým řešením podle Niu, u kterého kritická síla vyšla 6027 N. Pokud porovnáme celkový průběh síly v závislosti na stlačení profilu, lze vidět rozdílné chování. Průběh experimentu je více pozvolný, naopak u MKP simulace je vidět výrazný pokles síly při ztrátě stability. Hlavní je však to, že se velikosti kritických sil téměř shodují.

Modely s imperfekcí 0,1 mm a 0,3 mm jsou rovněž použitelné, protože odchylka od experimentální hodnoty je menší než 10 %. Model s imperfekcí 0,3 mm zaručuje při daném nastavení větší rezervu bezpečnosti z důvodu podhodnocení simulace. V případě malé imperfekce 0,05 mm vyšla kritická síla větší, a to dokonce mimo toleranční pásmo. Proto tento model není vhodný.

Podle předchozího porovnání vychází nejpřesněji model s imperfekcí prostředního bodu na hraně profilu při jeho posunu o 0,2 mm. Pro tento případ nastavení mohu konstatovat, že se jedná o nejvhodnější volbu modelu a mohu ho doporučit pro další analýzy.

6.5 Závěrečné shrnutí

Na závěr je důležité zmínit, že výsledky provedených simulací jsou platné pouze za podmínek, které odpovídají konkrétnímu nastavení a parametrům daného modelu. Pokud bych použil např. profil o jiných rozměrech, než se kterými jsem počítal, musela by se provést podobná analýza znovu. V tu chvíli již přibližně vím, jaký model včetně typu a velikosti imperfekcí je výhodný a naopak ten, se kterým se nevyplatí počítat.

7 ZÁVĚR

Tato bakalářská práce vzešla z potřeby simulovat ztrátu stability v případě složitějších modelů leteckých konstrukcí. Požadavkem bylo vytvořit výpočtový model výztužného profilu, který se bude chovat co nejrealističtěji a dokáže adekvátně postihnout ztrátu stability. Zároveň bylo potřeba zajistit, aby příprava takového modelu nebyla příliš pracná a výpočet trval co nejkratší dobu, a to s ohledem na přesnost výsledků. Aby byl takový model vytvořen, bylo nutné provést řadu analýz, výpočtů a porovnání a tím dospět k optimální volbě numerického modelu. MKP je však přibližná metoda a její výsledky bylo třeba verifikovat na základě jiných způsobů, konkrétně analytických výpočtů a experimentálního řešení.

V první části bakalářské práce jsem se proto zabýval analytickým řešením ztráty stability zadaného výztužného profilu. Porovnal jsem metody pro řešení celkové i místní ztráty stability, abych si ověřil, jakým způsobem se profil pravděpodobně poruší. Nejpresnější výsledky byly dosaženy pomocí empirických metod pro výpočet místní ztráty stability, a to konkrétně podle Timoshenka nebo Niu.

Hlavní částí mé bakalářské práce bylo numerické řešení metodou konečných prvků. Vytvořil jsem výpočtový model, což zahrnovalo mj. zvolení diskretizace, nadefinování okrajových podmínek nebo stanovení optimální velikosti imperfekcí, což je v případě úloh spojených se ztrátou stability velmi důležité. Proto jsem se z velké části věnoval právě porovnání vlivu imperfekcí na stabilitu daného profilu. Vytvořil jsem pět variant modelů s různým umístěním imperfekcí a zjišťoval, který způsob vychází nejlépe.

Závěrečné vyhodnocení jsem provedl v poslední části práce při porovnání s průběhem síly naměřeném při experimentu. Na základě toho jsem vybral model, který se nejvíce shodoval právě s experimentální hodnotou i analytickým výpočtem. Konkrétně to byl model s imperfekcí prostředního bodu na hraně profilu při jeho posunu o 0,2 mm. V tomto případě nastala největší shoda s kritickou hodnotou danou experimentem i analytickým řešením.

8 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] PÍŠTĚK, Antonín, Oldřich GRÉGR a Václav KAHÁNEK. Pevnost a životnost letadel. Brno: VUT Brno, 1988, 266 s.
- [2] NIU, Michael Chun-Yung. Airframe structural design. 2nd ed. Hong Kong: Hong Kong Conmilit Press, 2004, 612 s. ISBN 9627128090.
- [3] NIU, Michael Chun-Yung. Airframe stress analysis and sizing. 2nd ed. Hong Kong: Hong Kong Conmilit Press, 1999. ISBN 9627128082.
- [4] BRUHN, Elmer. Analysis and Design of Flight Vehicle Structure. Michigan: S.R. Jacobs, 1973.
- [5] MADDUX, Gene, Leon VORST, Joseph GIESSLER a Terence MORITZ. Stress analysis manual. Dayton, Ohio: U.S. Department of Commerce, 1969. ISBN AFFDL-TR-69-42.
- [6] ČTVERÁK, J, J MERTL a Antonín PÍŠTĚK. Soubor podkladů pro pevnostní výpočty leteckých konstrukcí. Brno: LÚ FSI VUT Brno, 1997, 22 l.: tabulky, grafy.
- [7] Metallic materials and elements for aerospace vehicle structures: MIL-HDBK-5H. Department of defense, 2001.
- [8] KELLER, Ladislav et al. Učebnice pilota 2013: Pro žáky a piloty všech druhů letounů a sportovních létajících zařízení, provozujících létání jako svou zájmovou činnost. 1. Cheb: Svět křídel, 2013. ISBN 978-80-87567-26-5.
- [9] PETRUŠKA, Jindřich. MKP v inženýrských výpočtech [online]. [cit. 2017-02-01]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>
- [10] BURŠA, Jiří. Metoda konečných prvků [online]. [cit. 2017-03-26]. Dostupné z: http://www.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Stud_opory/MKP4.pdf
- [11] VRBKA, Jan. Pružnost a Pevnost I: Učební text [online]. Brno, 2012 [cit. 2017-04-14].
- [12] Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge [online]. Federal Aviation Administration, 2016 [cit. 2017-05-19]. Dostupné z: https://www.faa.gov/regulations_policies/handbooks_manuals/aviation/phak/media/pilot_handbook.pdf

9 SEZNAM ZKRATEK, SYMBOLŮ, OBRÁZKŮ A TABULEK

9.1 Seznam použitých zkratek a symbolů

Veličina/symbol	Jednotka	Popis
a	[mm]	Délka ramene sekce 1
b	[mm]	Délka ramene sekce 2
b	[mm]	Šířka segmentu profilu
c	[-]	Koeficient okrajových podmínek
C_e	[-]	Koeficient počtu volných hran
E	[MPa]	Modul pružnosti
F_{cc}	[MPa]	Místní kritické napětí celého průřezu
F_{cs}	[MPa]	Místní kritické napětí sekce průřezu
F_{cy}	[MPa]	Mez kluzu v tlaku
F_{kr}	[N]	Kritická síla
HMH	[-]	Huber-von Mises-Hencky (energetická hypotéza)
i_{min}	[mm]	Minimální poloměr setrvačnosti
J_2	[mm ⁴]	Minimální kvadratický moment průřezu
J_{min}	[mm ⁴]	Minimální kvadratický moment průřezu
l	[mm]	Délka profilu
MKP	[-]	Metoda konečných prvků
R_m	[MPa]	Mez pevnosti
$R_{p0,2}$	[MPa]	Smluvní mez kluzu
S	[mm ²]	Plocha příčného průřezu
t	[mm]	Tloušťka segmentu průřezu
λ	[-]	Štíhlost
λ_m	[-]	Mezní štíhlost
λ_{red}	[-]	Redukovaná štíhlost
$\lambda_{m,red}$	[-]	Mezní redukovaná štíhlost
σ_{kr}	[MPa]	Kritické napětí
$\sigma_{kr,E}$	[MPa]	Kritické napětí Euler
$\sigma_{kr,J}$	[MPa]	Kritické napětí Johnson
$\sigma_{kr,T}$	[MPa]	Kritické napětí Tetmajer
$\sigma_{kr,T1}$	[MPa]	Kritické napětí Timoshenko 1
$\sigma_{kr,T2}$	[MPa]	Kritické napětí Timoshenko 2
$\sigma_{kr,N}$	[MPa]	Kritické napětí Niu
$\sigma_{kr,B}$	[MPa]	Kritické napětí Bruhn

9.2 Seznam obrázků

obr. 2-1 Konstrukční prvky poloskořepinového křídla [12]	17
obr. 2-2 Řez křídlem poloskořepinové konstrukce [1]	17
obr. 2-3 Síly působící na letoun [12]	18
obr. 2-4 Silové působení na křídle [8]	18
obr. 2-5 Průběh napětí ve vyztuženém potahu při tlakovém zatížení [2]	19
obr. 2-6 Vyztužený nosný potah.....	19
obr. 3-1 Závislost kritické síly na stlačení [9]	21
obr. 3-2 Diagram stability prutu [1].....	22
obr. 3-3 Charakteristické vybočení prutu při celkové ztrátě stability.....	23
obr. 3-4 Místní ztráta stability profilu	23
obr. 3-5 Rozložení napětí po průřezu [2].....	24
obr. 4-1 Geometrie výztužného profilu	25
obr. 4-2 Hlavní centrální osy průřezu	26
obr. 4-3 Vliv okrajových podmínek [2].....	27
obr. 4-4 Johnsonova parabola	30
obr. 4-5 Rozložení průřezu na segmenty [6]	33
obr. 4-6 Uložení segmentů v průřezu	33
obr. 4-7 Rozměry průřezu profilu-Niu	35
obr. 4-8 Místní kritické napětí protlačovaných profilů [3]	36
obr. 4-9 Určení úhlových sekcí průřezu [4].....	37
obr. 4-10 Rozměry průřezu profilu-Bruhn	38
obr. 5-1 Typy konečných prvků [10].....	41
obr. 5-2 Způsoby vytvoření modelu	42
obr. 5-3 Skořepinový model po vybočení	43
obr. 5-4 Vybraná síť	44
obr. 5-5 Okrajové podmínky	45
obr. 5-6 Chronologie řešení	46
obr. 5-7 Příklad vytvoření imperfekce posunem uzlového bodu.....	47
obr. 5-8 Imperfekce prostředního bodu	48
obr. 5-9 Imperfekce A (2%)	50
obr. 5-10 Imperfekce A (20%)	50
obr. 5-11 Imperfekce A (40%)	51
obr. 5-12 Imperfekce A (46%)	51
obr. 5-13 Imperfekce A (48%)	52
obr. 5-14 Imperfekce celé hrany.....	53
obr. 5-15 Imperfekce B (2%).....	54
obr. 5-16 Imperfekce B (53%).....	55
obr. 5-17 Imperfekce B (54%).....	55
obr. 5-18 Imperfekce obou hrany	56
obr. 5-19 Imperfekce C (2%).....	57
obr. 5-20 Imperfekce C (68%).....	58
obr. 5-21 Imperfekce C (70%).....	58
obr. 5-22 Imperfekce stěny	59
obr. 5-23 Imperfekce D (2%)	60
obr. 5-24 Imperfekce D (60%)	61

obr. 5-25 Imperfekce D (62%).....	61
obr. 5-26 Imperfekce obou stěn	62
obr. 5-27 Imperfekce E (2%)	63
obr. 5-28 Imperfekce E (66%)	64
obr. 5-29 Imperfekce E (68%)	64

9.3 Seznam tabulek

tab. 4-1 Rozměry výztužného profilu	25
tab. 4-2 Materiálové charakteristiky [7]	26
tab. 4-3 Průřezové charakteristiky	26
tab. 4-4 Výsledky metod celkové ztráty stability	31
tab. 4-5 Převod do anglosaských jednotek	35
tab. 4-6 Postup výpočtu podle metody Niu	36
tab. 4-7 Převod do anglosaských jednotek	37
tab. 4-8 Převod do anglosaských jednotek	38
tab. 4-9 Výsledky metod místní ztráty stability	39
tab. 4-10 Souhrn výsledků analytických řešení	40
tab. 5-1 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce A	49
tab. 5-2 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce B	54
tab. 5-3 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce C	57
tab. 5-4 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce D	60
tab. 5-5 Hodnoty kritických sil v případě imperfekce E	63
tab. 6-1 Maximální hodnoty experimentu	65
tab. 6-2 Procentuální odchylka analytických metod od experimentu	66

9.4 Seznam grafů

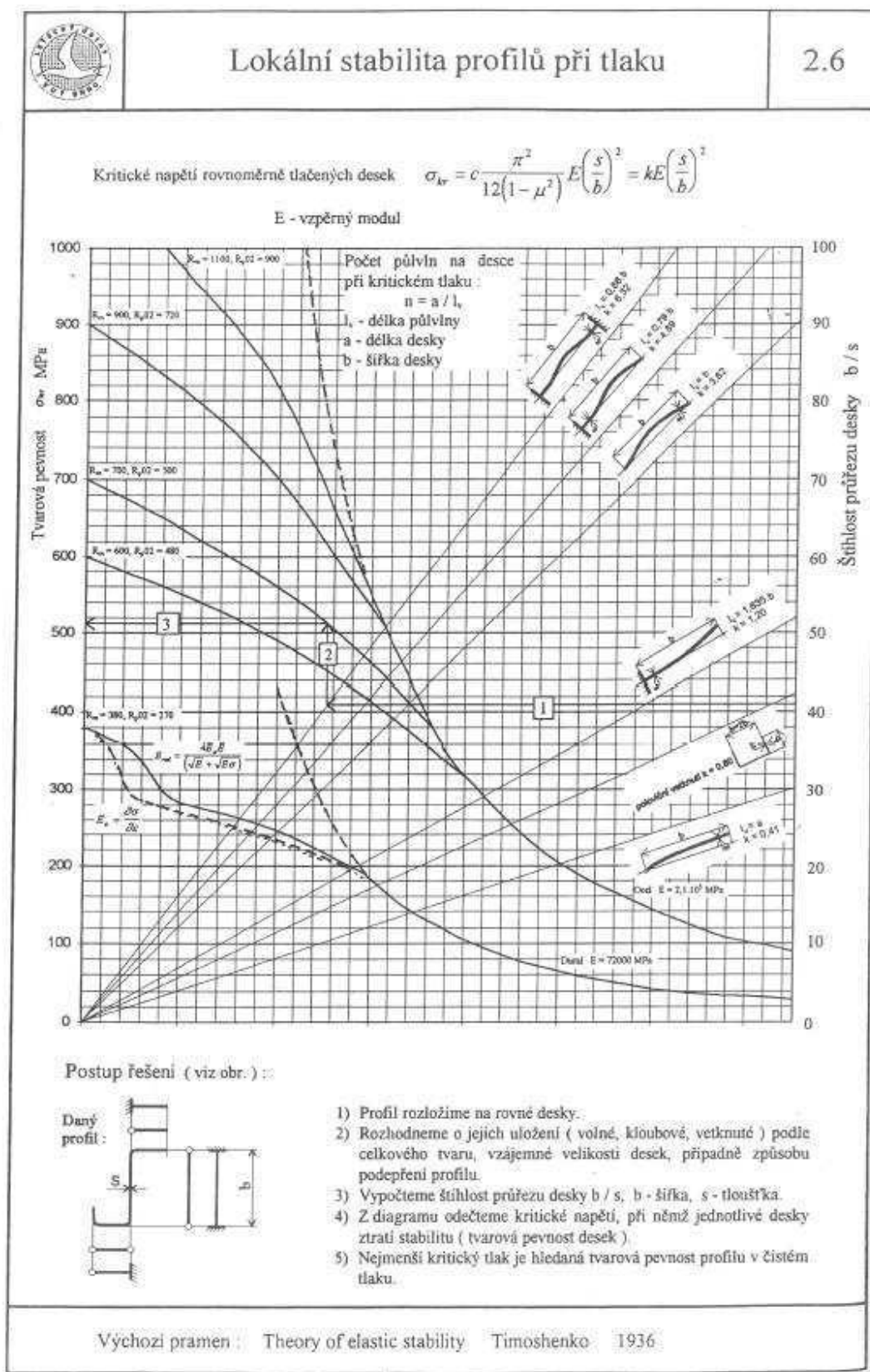
graf 4-1 Eulerova hyperbola	28
graf 4-2 Tetmajerova přímka	29
graf 4-3 Johnsonova parabola	31
graf 4-4 Porovnání výsledků celkové ztráty stability	32
graf 4-5 Diagram dle Timoshenka [6]	34
graf 4-6 Diagram Bruhn [4]	38
graf 5-1 Vliv typu prvku na stabilitu	43
graf 5-2 Vliv počtu elementů na stabilitu	44
graf 5-3 Vliv imperfekce jednoho bodu	48
graf 5-4 Trend kritické síly A	49
graf 5-5 Vliv imperfekce jedné hrany	53
graf 5-6 Trend kritické B	54
graf 5-7 Vliv imperfekce obou hrany	56
graf 5-8 Trend kritické síly C	57
graf 5-9 Vliv imperfekce stěny	59
graf 5-10 Trend kritické síly D	60
graf 5-11 Vliv imperfekce obou stěn	62
graf 5-12 Trend kritické síly E	63
graf 6-1 Průběh experimentálního měření	65
graf 6-2 Porovnání analytických výsledků s experimentem	66
graf 6-3 Výběr nejvhodnějšího modelu	67
graf 6-4 Výběr velikosti imperfekce	68

10 SEZNAM PŘÍLOH

Příloha č. 1: Diagram Timoshenko [6]	79
Příloha č. 2: Niu [3]	80
Příloha č. 3: Bruhn [4]	82
Příloha č. 4: Report (výstupní soubor RPT).....	84
Příloha č. 5 Excel (zpracování výsledků)	85

PŘÍLOHY

Příloha č. 1: Diagram Timoshenko [6]



5.3 Crippling Stress

Extrusion, formed sheet metal, and thin-walled tubes are all subject to a local or crippling type of failure. This type of failure is characterized by a local distortion of the cross-sectional shape. The beginning of distortion usually occurs at a load appreciably less than the failing load with the more stable portions of the cross-section continuing to take additional load while supporting the already buckled portions until complete collapse occurs. Although it is possible to predict theoretically the stress at which the first buckling occurs, no satisfactory theory exists for the prediction of the average stress at failure. Thus, it is necessary to rely on test results or empirical methods which have been found to give satisfactory agreement with test results.

When the corners of a thin-walled section in compression are restrained against any lateral movement, the corner material can continue to loaded even after local buckling has occurred in the section. The remaining material is largely ineffective in supporting additional load above the local buckling load. When the stress in the corners exceeds the yield stress, the section loses its ability to support any additional load and fails. The average stress on the section at the ultimate load is called the crippling stress F_{cr} . Fig. 5.3.1 shows the cross-sectional distortion occurring over one buckle length in a typical thin-walled section. Fig. 5.3.2 shows the stress distribution over the the cross-section just before crippling.

Crippling stress is a form of instability involving inelastic axial strain of the more stable portions of a structural element resulting in permanent deformation of the section. Its longitudinal axis of the section does not necessarily deflect laterally at crippling stress as it does during column buckling.

Crippling stress is commonly assumed to be independent of component length. However, crippling

stress tests indicate that the strength capability of a section is strongly affected by small changes in length

at $\frac{L'}{\rho}$ values in the range of 10 or less.

Crippling stress is calculated as if the stress were uniform over the cross-section. In reality, parts of the sections buckle at a load below the critical crippling load with the result that stable areas such as intersections and corners reach a higher stress than the buckled elements. At failure, the stress in corners and intersections is always above the material yield stress F_{cy} , although the crippling stress may be considerably less than the yield stress. The use of the compression yield stress as crippling strength cut-off has been used since there is no proven analytical method for the prediction of the crippling stress.

The following is a method to analyse the crippling stress allowables for extruded, machined and formed sections. Formed and extruded or machined sections are analysed in the same manner, although different values are used for each. The section is analysed by:

- The section is broken down into individual segments as shown in Fig. 5.3.3. Each segment (or element) has a width b , a thickness t , and will have either no edge free or one edge free.
- The crippling stress calculated is as follows:

$$F_{cr} = \frac{b_1 t_1 F_{cr1} + b_2 t_2 F_{cr2} + \dots}{b_1 t_1 + b_2 t_2 + \dots} = \frac{\sum b_n t_n F_{crn}}{\sum b_n t_n} \quad (5.3.1)$$

where

b_1, b_2, \dots Length of the individual segments

t_1, t_2, \dots Individual segment thickness

F_{cr1}, F_{cr2}, \dots Allowable crippling stresses corresponding to computed $\frac{b}{t}$ values of the individual segments as shown in Fig. 5.3.4 and Fig. 5.3.5.

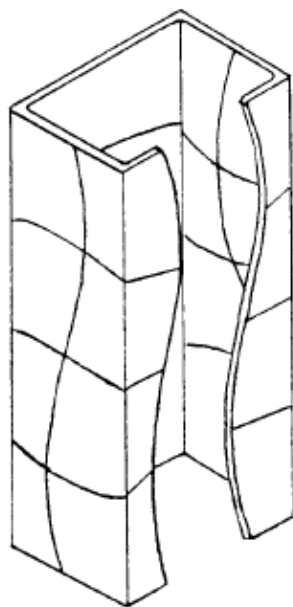


Fig. 5.3.1 Cross-sectional distortion.

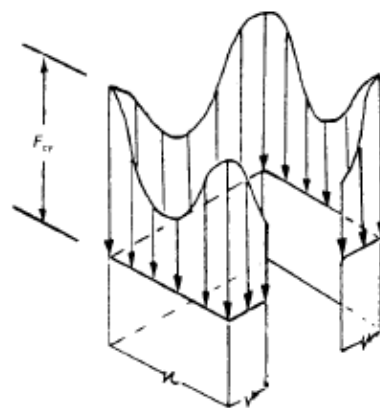


Fig. 5.3.2 Stress distribution.

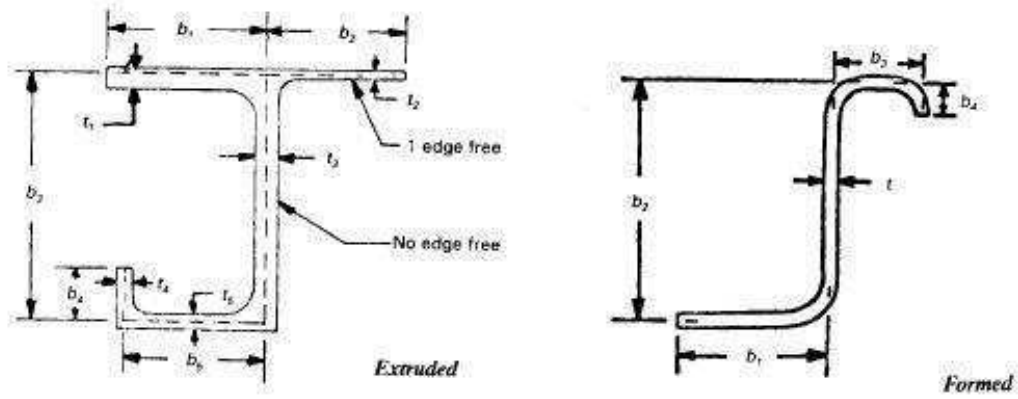


Fig. 5.3.3 Typical segment broken down of a section.

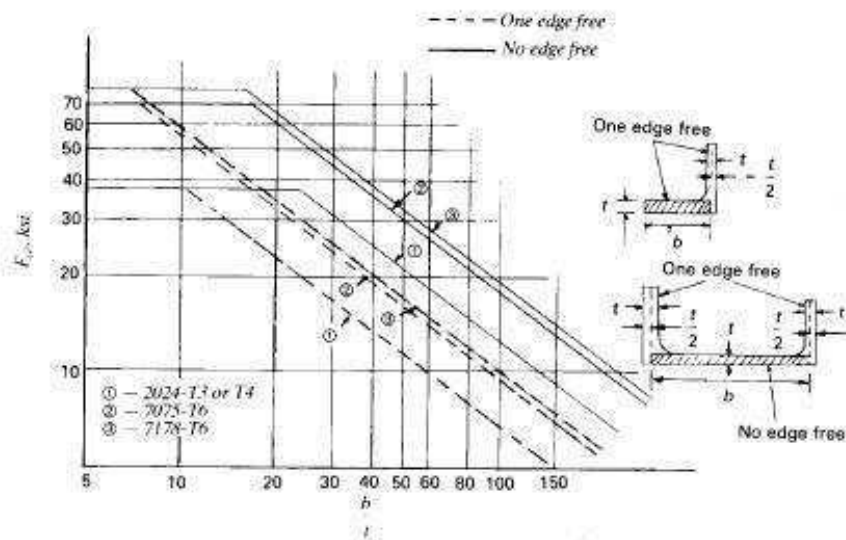


Fig. 5.3.4 Crippling stresses F_{cc} of aluminum extrusion alloys.

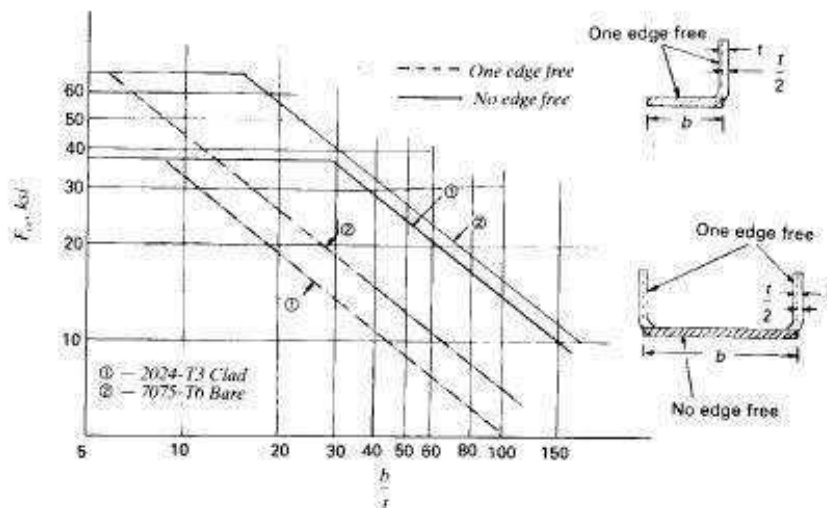


Fig. 5.3.5 Crippling stresses F_{cc} of aluminum sheets and plates.

CHAPTER C7

CRIPPLING STRENGTH OF COMPOSITE SHAPES AND SHEET-STIFFENER PANELS IN COMPRESSION

SHEET EFFECTIVE WIDTHS. COLUMN STRENGTH.

C7.1 Introduction.

Chapter C6 was concerned with the local buckling stress of composite sections when loaded in compression. Tests of short lengths of sections composed of flange-plate elements often show that after the section has buckled locally, the unit still has the ability to carry a greater load before failure occurs. In other words, the local buckling and local failure loads are not the same. For cases where local buckling occurs at low stress, the crippling or failing stress will be higher. When local buckling occurs at high stress such as .7 to .8 F_{cy} , buckling and crippling stress are practically the same. Fig. C7.1 illustrates the stress distribution on the cross-section after local buckling has occurred but prior to local crippling or failure.

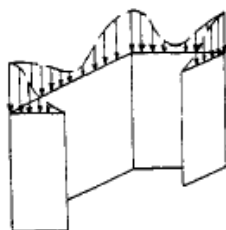


Fig. C7.1

As the load on the section is increased, the buckles on the flat portions get larger but most of the increasing load is transferred to the much stiffer corner regions until the stress intensity reaches a high enough value to cause sufficient deformation to cause failure.

A theoretical solution for the local crippling stress for all types of shapes has not been developed as the boundary restraint between flange and plate elements is unknown and also the manner in which the stress builds up in the corner regions is not well understood. Consequently, the methods of solution are semi-empirical in character, and the results of such methods have been sufficiently proven by tests. Two methods of calculating crippling stresses will be presented in this chapter.

C7.2 METHOD 1. THE ANGLE METHOD, or the Needham Method.

This method which will be referred to as the angle method or the Needham method was

presented in (Ref. 1). In this method the member section is divided into equal or unequal angles as illustrated in Fig. C7.2. The strength of these angle elements can be established by theory or tests. The ultimate strength or failing strength can then be found by adding up the strengths of the angle elements that make up the composite section.

Needham made a large number of tests on angle and channel sections. From a study of these test results as well as other published test data on channels, square and rectangular tubes, etc., he arrived at the following equation for the crippling or failing stress of angle sections.

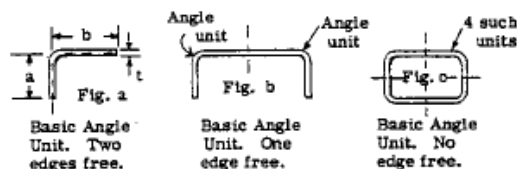


Fig. C7.2

$$F_{cs}/F_{cy} = C_e / (b'/t)^{0.75} \quad (C7.1)$$

where,

- F_{cs} = crippling stress (psi)
- F_{cy} = compression yield stress (psi)
- E = Young's modulus of elasticity in compression (psi)
- b'/t = equivalent b/t of section = $(a + b)/2t$
- C_e = coefficient that depends on the degree of edge support along the edges of contiguous angle units. Specifically they are:-
 - $C_e = 0.316$ (two edges free)
 - $C_e = 0.342$ (one edge free)
 - $C_e = 0.366$ (no edge free)

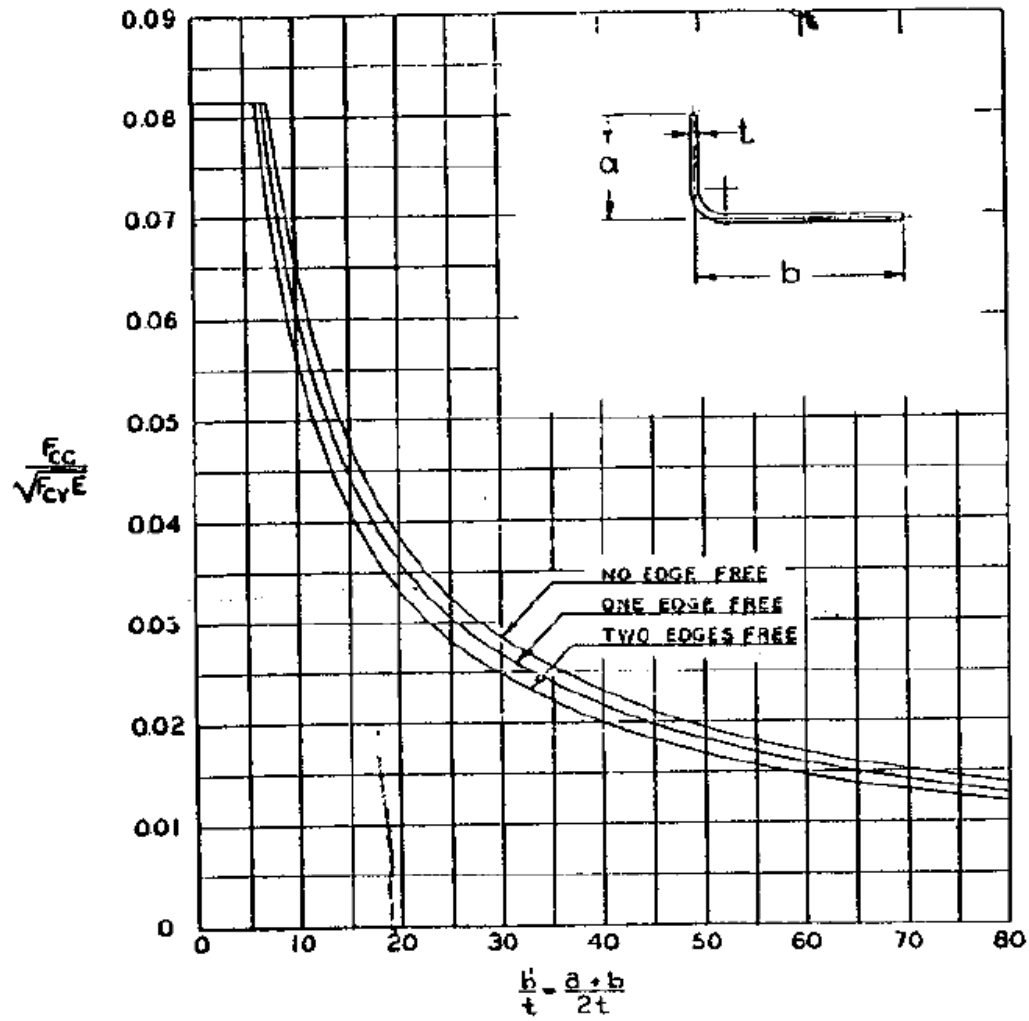
The crippling stress for angles, channels, zees and rectangular tubes can be determined directly from use of equation C7.1. The crippling load on an angle unit is then,

$$P_{cs} = F_{cs}A \quad (C7.2)$$

where A is the area of the angle.

The crippling stress of other formed

C7.1



(Note: F_{CC} same as F_{CB})

Fig. C7.3 Dimensionless Crippling Stress vs. b'/t (Ref. 1)

Příloha č. 4: Report (výstupní soubor RPT)

MSC.Patran 22.0.412320 Fri May 20 10:46:11 PDT 2016 - Analysis Code: MSC.Nastran

Load Case: Default, A1:Non-linear: 2. % of Load

Result Constraint Forces, Translational - Layer (NON-LAYERED)
Entity: Node Vector
(First of 50 Sources)

Result Sources		
-Source Id---	Loadcase Name-----	Subcase Name-----Layer Name----
1	Default	A1:Non-linear: 2. % of Load (NON-LAYERED)
	Global Variable: Percent of Load	= 2.
2	Default	A1:Non-linear: 4. % of Load (NON-LAYERED)
	Global Variable: Percent of Load	= 4.
3	Default	A1:Non-linear: 6. % of Load (NON-LAYERED)
	Global Variable: Percent of Load	= 6.
.		
.		
.		
22	Default	A1:Non-linear: 44. % of Load (NON-LAYERED)
	Global Variable: Percent of Load	= 44.
23	Default	A1:Non-linear: 46. % of Load (NON-LAYERED)
	Global Variable: Percent of Load	= 46.
24	Default	A1:Non-linear: 48. % of Load (NON-LAYERED)
	Global Variable: Percent of Load	= 48.
.		
.		
.		
48	Default	A1:Non-linear: 96. % of Load (NON-LAYERED)
	Global Variable: Percent of Load	= 96.
49	Default	A1:Non-linear: 98. % of Load (NON-LAYERED)
	Global Variable: Percent of Load	= 98.
50	Default	A1:Non-linear: 100. % of Load (NON-LAYERED)
	Global Variable: Percent of Load	= 100.

1	2	262.682922
2	2	525.360168
3	2	788.028320
.		
.		
.		
22	2	5773.571777
23	2	6021.532715
24	2	5495.630371
.		
.		
.		
48	2	5528.578125
49	2	5523.945801
50	2	5519.348633

Příloha č. 5 Excel (zpracování výsledků)

Profil	15x15x1-80		44	0,22	5773,571777
materiál	dural		46	0,23	6021,532715
zatížení	deformační 0,5 mm		48	0,24	5495,630371
řešič	106		50	0,25	5577,701172
imperfekce [mm]	0,2		52	0,26	5616,441895
umístění imperfekce	A		54	0,27	5648,873535
			56	0,28	5668,599609
			58	0,29	5679,600098
ZATÍŽENÍ [%]	POSUV [mm]	REAKČNÍ SÍLA [N]	60	0,3	5686,683594
2	0,01	262,682922	62	0,31	5682,501953
4	0,02	525,360168	64	0,32	5672,350586
6	0,03	788,02832	66	0,33	5658,97168
8	0,04	1050,686768	68	0,34	5652,29834
10	0,05	1313,335083	70	0,35	5639,615723
12	0,06	1575,972656	72	0,36	5630,12793
14	0,07	1838,598511	74	0,37	5619,806641
16	0,08	2101,212158	76	0,38	5608,735352
18	0,09	2363,812012	78	0,39	5598,473633
20	0,1	2626,396973	80	0,4	5593,317383
22	0,11	2888,965088	82	0,41	5581,572754
24	0,12	3151,51416	84	0,42	5573,950195
26	0,13	3414,040771	86	0,43	5563,969238
28	0,14	3676,54126	88	0,44	5554,387207
30	0,15	3939,009277	90	0,45	5546,564941
32	0,16	4201,436523	92	0,46	5539,241211
34	0,17	4463,810059	94	0,47	5533,374512
36	0,18	4726,109863	96	0,48	5528,578125
38	0,19	4988,306152	98	0,49	5523,945801
40	0,2	5250,347168	100	0,5	5519,348633
42	0,21	5512,150391			